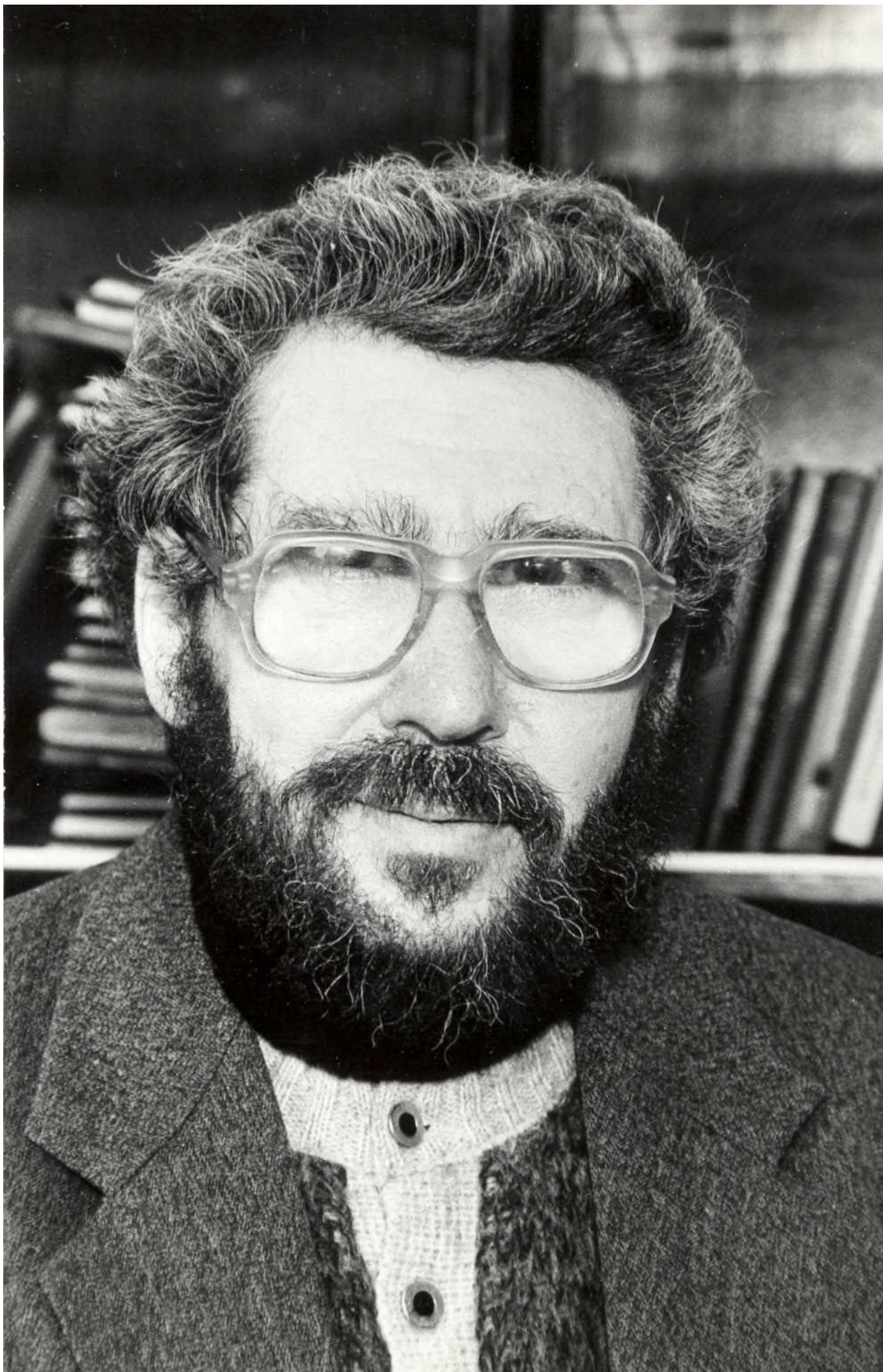

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

А. Ю. Левин

ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Монография

Ярославль 2011

УДК 517.925.56, 517.926.4, 517.948.3
ББК В161.61я43
Л36

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве научного издания. План 2010/2011 учебного года

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. Б. Н. Садовский;
кафедра математического моделирования
Воронежского государственного университета.

Л36 Л е в и н, А. Ю. Вопросы качественной теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения: монография / науч. ред. С. Д. Глызин; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2011. — 228 с.
ISBN 978–5–8397–0797–9

Настоящее издание представляет собой монографию, составленную по докторской диссертации известного математика, профессора Анатолия Юрьевича Левина (1936 – 2007).

Для широкого круга специалистов, аспирантов, студентов, интересующихся качественной теорией обыкновенных дифференциальных уравнений.

Монография публикуется при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт №02.740.11.0197).

Ил. 1. Библиогр.: 151 назв.

УДК 517.925.56, 517.926.4,
517.948.3
ББК В161.61я43

ISBN 978–5–8397–0797–9

О докторской диссертации А. Ю. Левина

Докторская диссертация А. Ю. Левина — выдающийся вклад в качественную теорию линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка

$$Lx = x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0. \tag{1}$$

Диссертация А. Ю. Левина является итогом его исследований, выполненных в течение 1960–1969 годов. Ряд важных и интересных результатов получены им также для систем линейных дифференциальных уравнений и интегральных уравнений Фредгольма. Но, как отмечает А. Ю. Левин, системы дифференциальных уравнений и интегральные уравнения рассмотрены под углом зрения, связанным со спецификой дифференциального уравнения n-го порядка.

Результаты Левина были высоко оценены М. Г. Крейном, В. А. Якубовичем, Д. В. Аносовым и другими известными математиками. Тем не менее диссертация не была утверждена ВАКом. Экспертная комиссия ВАКа по математике руководствовалась при этом совсем не научными соображениями. В эти годы экспертная комиссия использовалась как государственная дубина для подавления некоторых неугодных математических школ.

Перейдем к содержанию диссертации. Диссертация состоит из четырех глав. Сразу отметим, что часть результатов первой и второй главы анонсированы в кратких заметках в Докладах АН СССР и не публиковались подробные доказательства этих результатов в общедоступных журналах. К этому вопросу мы еще вернемся.

Первая глава (самая большая по объему) начинается с рассмотрения уравнения (1) с комплекснозначными коэффициентами $p_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, локально суммируемыми в $(a, b]$. Ставится следующая задача: как должны вести себя коэффициенты уравнения (1) в окрестности точки a, чтобы задача Коши $x^{(i)}(a) = c_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ имела решение при любых c_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$? На этот вопрос дается исчерпывающий ответ. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши в явном виде. Интересен метод доказательства этого результата. Задача сводится к вопросу о разрешимости задачи Коши для системы уравнений первого порядка, и используется тот факт, что дополнительное слагаемое с суммируемой на $[a, b]$ матрицей коэффициентов не влияет на разрешимость задачи Коши. После этого задача сводится к задаче с явно интегрируемой системой уравнений.

В качестве приложения существенно усиливается результат Э. Хилле [1] об асимптотике решений на бесконечном промежутке уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + q(t)x = 0.$$

Во втором параграфе рассматривается задача о непрерывной зависимости решений линейных дифференциальных уравнений от параметра на конечном промежутке. Рассматривается последовательность матричных уравнений

$$\dot{X}_k = A_k(t)X_k + F_k, \quad X_k(a) = C, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2}$$

где матрицы $A_k(t)$, $F_k(t)$ суммируемы на $[a, b]$. Ставится следующая задача: при каких условиях на матрицы $A_k(t)$, $F_k(t)$ последовательность решений $X_k(t)$ системы (2) при любой матрице C сходится к матрице $X_0(t)$ равномерно на $[a, b]$? Метод решения этой задачи идейно близок к методу первого параграфа. Полученные достаточные условия в случае одного уравнения n-го порядка приводят к полному решению задачи —

эффективным необходимым и достаточным условиям равномерной сходимости при $k \to \infty$ на конечном промежутке последовательности решений уравнения

$$x_k^{(n)} + p_{1,k}(t)x_k^{(n-1)} + \dots + p_{n,k}(t)x_k + p_{n+1,k}(t) = 0$$

к решению уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x + p_{n+1}(t) = 0.$$

Параграф заканчивается обсуждением задачи об условиях представления решения системы

$$X' = A(t)X$$

в виде $X(t) = I + o(1)$ при $t \to \infty$. Здесь I — единичная матрица. Доказывается теорема, обобщающая теорему А. Винтнера [2]. При этом используется новое интересное неравенство для решений систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Рамки уравнений с суммируемыми коэффициентами во многих прикладных задачах являются стеснительными. Третий параграф первой главы диссертации посвящен рассмотрению обобщенных уравнений — уравнений с разрывными коэффициентами. Один из возможных путей состоит в переходе к интегральным уравнениям с трактовкой интеграла в расширенном смысле. Этот путь детально обсуждается А. Ю. Левиным. Выясняются границы его применимости. В частности, этот подход не охватывает системы уравнений, у которых диагональные элементы являются δ-функциями Дирака. Чтобы охватить такие случаи, А. Ю. Левин предлагает следующий метод. Рассматривается система уравнений с обобщенными коэффициентами, где коэффициенты — производные функций ограниченной вариации. Матрица коэффициентов аппроксимируется последовательностью матриц с непрерывными элементами. Опишем условия аппроксимации. Исходная система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \dot{M}(t)x, \tag{3}$$

где элементы $m_{ij}(t)$ матрицы $M(t)$ имеют ограниченную вариацию V_a^b на промежутке $[a, b]$. Последовательность аппроксимирующих матриц $M_k(t)$ выбирается таким образом, что

$$m_{ij}^k(t) \to m_{ij}(t), \quad k \to \infty, \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad i, j = 1, \dots, n \tag{4}$$

и

$$V_a^b m_{ij}^k(t) \to V_a^b m_{ij}(t), \quad k \to \infty, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Система (3) называется δ-корректной, если любая последовательность решений аппроксимирующих систем с непрерывными коэффициентами, которые удовлетворяют условиям (4),(5), сходится к некоторому пределу на промежутке $[a, b]$. Этот предел и принимается за решение системы с обобщенными коэффициентами. Устанавливаются необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять матрица обобщенных коэффициентов, чтобы система была δ-корректной. Эти условия выглядят следующим образом:

$$\Omega^+ m_{ij} \cap \Omega^+ m_{ki} = \Omega^- m_{ij} \cap \Omega^- m_{ki} = \oslash$$

для любых трех индексов i, j, k из $1, \dots, n$, среди которых хотя бы два различны.

Здесь $\Omega^{\pm} f$ — множество точек разрыва функции f справа (слева).

Отметим, что различные способы определения решений уравнений с обобщенными коэффициентами предлагались В. Феллером, И. Курцвейлем, Ф. Аткинсоном и другими математиками. В частности, большое внимание этому вопросу уделяется в известной монографии Ф. Аткинсона [3]. А. Ю. Левин привел пример уравнения, для которого подход Ф. Аткинсона приводит к неверному результату, в то время как способ, предложенный в диссертации, дает правильный ответ.

Последний четвертый параграф первой главы посвящен приложениям результатов третьего параграфа к вопросу об устойчивости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. На этом параграфе остановимся подробнее, так как судьба замечательных результатов этого параграфа необычна. Они практически неизвестны. Основные утверждения были анонсированы в заметке в ДАН СССР [4] в 1962 году. Подробное изложение результатов третьего параграфа, на котором основан четвертый параграф, появилось в 1974 году в Вестнике Ярославского университета [5]. Это издание не является достоянием широкой математической общественности. Подробное же изложение материала четвертого параграфа так и не появилось.

Перейдем к изложению основных результатов.

Рассмотрим уравнение
$$\ddot{x} + q(t)x = 0, \tag{6}$$
где функция $q(t)$ периодическая с периодом ω и удовлетворяет условию
$$\int\limits_0^{\omega} q(t)\,dt > 0.$$
Отметим, что для уравнения (6) устойчивость решений эквивалентна ограниченности решений при $t \geqslant 0$. А. М. Ляпунов [6] провел глубокое исследование задачи об устойчивости решений уравнения (6). Он рассмотрел уравнение
$$\ddot{x} + \lambda q(t)x = 0, \tag{7}$$
где $\lambda > 0$ — параметр и выполняются условия
$$q(t) \geqslant 0, \quad q(t) \not\equiv 0. \tag{8}$$
Ляпунов показал, что положительная полуось разбивается на интервалы
$$0 < \lambda_1' \leqslant \lambda_1'' < \lambda_2' \leqslant \lambda_2'' < \lambda_3' \leqslant \lambda_3'' < \dots,$$
где $0, \lambda_2', \lambda_2'', \lambda_4', \lambda_4'', \dots$ — корни уравнения $A(\lambda) = -1$, а $\lambda_1', \lambda_1'', \lambda_3', \lambda_3'', \dots$ — корни уравнения $A(\lambda) = 1$. Здесь $A(\lambda)$ — целая аналитическая функция. Ее значения $A(\lambda^*)$ — постоянные Ляпунова, определяемые для фиксированного λ уравнением
$$A(\lambda^*) = \frac{y_1(\omega) + \dot{y}_2(\omega)}{2}.$$
Функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения уравнения (7) при $\lambda = \lambda^*$, удовлетворяющие начальным условиям
$$y_1(0) = 1,\ \dot{y}_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\ \dot{y}_2(0) = 1.$$

Интервалы $(0, \lambda_1')$, $(\lambda_1'', \lambda_2')$, $(\lambda_2'', \lambda_3'), \ldots$ являются интервалами ограниченности решений уравнения (7). Их называют зонами устойчивости. Остальные интервалы, включая интервал $(-\infty, 0)$, являются интервалами неограниченности решений (зоны неустойчивости). Интервал $(0, \lambda_1')$ называется нулевой зоной устойчивости.

Отметим, что В. И. Арнольд в статье [7] привлек внимание к вопросу о критериях (необходимых и достаточных условиях) устойчивости по Ляпунову особых точек автономных систем дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметров. Он построил пример системы трех дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от четырех параметров, для которой критерий устойчивости нулевого решения не является алгебраическим.

Линейное неавтономное дифференциальное уравнение второго порядка (7) с одним параметром доставляет пример уравнения, для которого критерий устойчивости не является алгебраическим ($A(\lambda)$ — аналитическая функция).

Первые достаточные условия устойчивости для нулевой зоны устойчивости уравнения (6) были установлены А. М. Ляпуновым. Сформулируем этот результат.

Решения уравнения (6) *ограничены, если выполняются условия* (8) *и*

$$\int_0^\omega q(s)\,ds \leqslant \frac{4}{\omega}. \tag{9}$$

Условие (9) является следствием того факта, что внутри зоны устойчивости постоянная Ляпунова удовлетворяет неравенству $A(\lambda) < 1$.

М. Г. Крейн [8] показал, что условие (9) можно заменить менее ограничительным условием

$$\int_0^\omega [q(s)]_+\,ds \leqslant \frac{4}{\omega}, \tag{10}$$

где

$$[q(t)]_+ = \begin{cases} q(t), & \text{если } q(t) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } q(t) < 0. \end{cases}$$

Условия другого типа были получены Н. Е. Жуковским, В. А. Якубовичем, З. Опялем.

А. М. Ляпунов в своей работе не использовал связь между устойчивостью решений уравнения (6) и расстояниями между нулями нетривиальных решений. На эту связь впервые обратил внимание Н. Е. Жуковский. Он отметил, что условие (9) можно интерпретировать как достаточное условие того, что

расстояние между соседними нулями любого нетривиального решения уравнения (6) *больше* ω.

Это утверждение относится к произвольной зоне устойчивости. Далее, Н. Е. Жуковский обнаружил, что исследование связи устойчивости решений с расстояниями между нулями нетривиальных решений приводит к серии признаков устойчивости

$$\frac{n^2\pi^2}{\omega^2} \leqslant q(t) \leqslant \frac{(n+1)\pi^2}{\omega^2} \tag{11}$$

при некотором целом $n > 0$ и $0 \leqslant t \leqslant \omega$. В частности, при $n = 0$ получим аналог признака Ляпунова

$$0 \leqslant q(t) \leqslant \frac{\pi^2}{\omega^2}. \tag{12}$$

М. Г. Крейн и В. А. Якубович получили семейство признаков устойчивости для нулевой зоны устойчивости:

$$\int_0^\omega \left[q(t) - a^2\right]_+ dt \leqslant 2a \operatorname{ctg} \frac{\omega a}{2} \quad \text{при некотором } a \in \left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]. \tag{13}$$

При $a = 0$ правая часть доопределяется по непрерывности и переходит в $4/\omega$, т.е. получим признак (10). При $a = \pi/\omega$ получим признак (12). Правая часть (13) ни при каких ω и a не может быть заменена большей функцией этих параметров. Следовательно, (13) дает семейство признаков устойчивости, носящих точный характер.

З. Опяль нашел следующее семейство признаков устойчивости:

$$\int_t^{t+\omega/4} \left[q(t) - a^2\right]_+ dt \leqslant \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega a}{4} + 5}\right) \operatorname{ctg} \frac{\omega a}{4}$$

при некоторых $a \in \left[0, \pi/\omega\right]$, $(0 \leqslant t \leqslant \omega)$. Признак З. Опяля относится к скользящему промежутку $\left[t, t + \omega/4\right]$.

В диссертации А. Ю. Левин установил следующее семейство признаков устойчивости для уравнения (6):

Теорема 4.1. *Пусть при некотором* $a \in \left[0, \pi/\omega\right]$ *и некотором натуральном* n *выполнено неравенство*

$$\int_t^{t+\omega/n} \left[q(t) - a^2\right]_+ dt \leqslant 2a \frac{\cos \frac{\omega a}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\omega a}{n}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \omega. \tag{14}$$

Тогда решения уравнения (6) *ограничены на* $(-\infty, \infty)$.

В предельном случае $a = 0$ правая часть доопределяется по непрерывности и неравенство (14) принимает вид

$$\int_t^{t+\omega/n} [q(t)]_+ \, dt \leqslant \frac{c_n}{\omega},$$

где

$$c_n = 2n\left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right). \tag{15}$$

Правые части в (14) и (15) ни при каких a, ω, n не могут быть увеличены. Легко видеть, что $c_1 = c_2 = 4$, $c_3 = 3$, $c_4 = 8 - 4\sqrt{2}$. При $n \to \infty$ последовательность c_n убывает как π^2/n. Следовательно, в пределе получим признак Жуковского (12). Совпадение постоянных c_1 и c_2 влечет интересное следствие. Неравенство (10) может быть заменено неравенством

$$\int_t^{t+\omega/2} [q(t)]_+ \, dt \leqslant \frac{4}{\omega}. \tag{16}$$

При $q(t) \geqslant 0$ получается усиление классического признака Ляпунова. Этот результат неулучшаем. При $n = 4$ получается усиление признака Опяля.

Связь устойчивости с нулями нетривиальных решений позволяет свести доказательство теоремы 4.1 к вопросу о неосцилляции решений. Ключевым моментом в доказательстве является переход от уравнения (6) к рассмотрению обобщенного уравнения

$$\ddot{x} + \dot{m}(t)x = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant h, \tag{17}$$

где $m(t)$ — функция ограниченной вариации на $[0, h]$. Уравнение (17) является δ-корректным. Для этого уравнения понятие тривиального и нетривиального решений имеет обычный смысл. Теорема 4.1 доказывается с помощью следующей теоремы об оценке расстояния между нулями решений обобщенного уравнения (17).

Теорема 4.2. *Пусть $m(t) = a^2 t + r(t)$, где $a \in [0, \pi/h)$ — постоянная и $r(t)$ — неубывающая в $[0, h]$ функция, удовлетворяющая при каком-либо целом $n > 0$ неравенству*

$$r\left(t + \frac{h}{n}\right) - r(t) < 2a \frac{\cos\frac{ha}{n} - \cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{ha}{n}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{(n-1)h}{n}.$$

Тогда каждое нетривиальное решение уравнения (16) *имеет не более одного нуля в* $[0, h]$.

Доказательство теоремы 4.2 разбивается на несколько этапов.

Сначала доказывается лемма о сравнении решений двух обобщенных уравнений Риккати

$$\dot{z}_i = z_i^2 + \dot{m}_i(t), \quad i = 1, 2, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

где $m_1(t)$, $m_2(t)$ — функции ограниченной вариации на $[t_0, t_1]$. После обычных замен переменных эта лемма трансформируется в лемму о сравнении двух решений обобщенных уравнений второго порядка

$$\ddot{x}_i + \dot{m}_i(t)x_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leqslant t \leqslant h,$$

где $m_i(t)$ — функции ограниченной вариации на $[0, h]$.

Основной момент доказательства, объясняющий необходимость перехода к обобщенным уравнениям, состоит в следующем.

Пусть a $(0 \leqslant a < \pi/n)$, l $(0 < l \leqslant h/2)$ и $\xi > 0$ — некоторые заданные постоянные. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}_1 + [a^2 + r_1(t)]x_1 = 0, \tag{18}$$

где $r_1(t)$ — неубывающая на $[0, h]$ функция, подчиненная условию

$$r_1(t + l) - r(t) \leqslant \xi, \quad 0 \leqslant t \leqslant h - l, \tag{19}$$

Лемма 4.3. *Пусть уравнение* (18) *обладает нетривиальным решением $x_1(t)$ таким, что $x_1(0) = x_1(h) = 0$. Тогда найдется неубывающая на $[0, h]$ функция $r_2(t)$ такая, что*

1) $r_2(t + l) - r_2(t) \equiv \xi, \quad 0 \leqslant t \leqslant h - l;$

2) уравнение

$$\ddot{x}_2 + [a^2 + \dot{r}_2(t)]x_2 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant h$$

обладает нетривиальным решением, имеющим в $[0, h]$ не менее двух нулей.

Лемма позволяет осуществить переход к уравнению с l-периодическим обобщенным коэффициентом. Доказательство леммы сводится к проверке существования неубывающей функции $r_2(t)$, удовлетворяющей условиям

$$r_2(t+l) - r_2(t) = \xi, \quad r_2(t) \leqslant r_1(t),\ (0 \leqslant t \leqslant t_0), \quad r_2(t) \geqslant r_1(t),\ (t_0 \leqslant t \leqslant h).$$

Так как рассматривается обобщенное уравнение и функция $r_2(t)$ не должна быть абсолютно непрерывной, то такую функцию можно построить непосредственно. На дальнейшем доказательстве теоремы 4.2 останавливаться не будем.

Отметим, что недавно Ю. С. Колесов [9] опубликовал доказательство того, что неравенство (16) влечет устойчивость решений уравнения (6), опирающееся на идеи теории оптимального управления.

Вторая глава диссертации посвящена оценке роста собственных значений некоторого класса интегральных уравнений Фредгольма и приложению этих результатов к исследованию структурных свойств функции Грина несингулярных краевых задач для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка. Последний параграф посвящен некоторым смежным вопросам, о которых речь будет ниже.

В первом параграфе рассматривается интегральное уравнение Фредгольма

$$x(t) = \lambda \int\limits_0^h K(t,s)x(s)\,d\mu(s). \tag{20}$$

Здесь $\mu(s)$ — функция ограниченной вариации, $K(t,s)$, $\mu(s)$ комплекснозначны. Известно, что при достаточной гладкости ядра $K(t,s)$ собственные значения λ_k растут достаточно быстро и соответственно ряды Фредгольма $D(t,s,\lambda)$ и $D(\lambda)$ растут достаточно медленно. Интегральное уравнение (20) связано с краевой задачей для линейного дифференциального уравнения n-го порядка $(n \geqslant 2)$

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = \lambda q(t)x, \quad 0 \leqslant t \leqslant h, \tag{21}$$

$$l_i[x] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{22}$$

Здесь l_1, l_2, $\dots$, l_n — линейные (и линейные независимые) функционалы в $C^{n-1}[0,h]$, p_1, p_2, $\dots$, p_n, q — суммируемы в $[0,h]$, $q(t) \not\equiv 0$. Задача (21)—(22), не имеющая $\lambda = 0$ собственным значением, эквивалентна интегральному уравнению (20), где $K(t,s)$ функция Грина краевой задачи (21)—(22) и $\mu(t) = \int_0^t q(s)\,ds$.

Вопрос о росте собственных значений краевых задач изучался многими авторами. Показано, что

$$\lambda_k \sim Ck^n \quad (k \to \infty),$$

где постоянная C не зависит от k. Собственные значения занумерованы в порядке роста их модулей и с учетом их кратностей как корней $D(\lambda)$. Если говорить об оценках снизу роста $|\lambda_k|$, то возникает вопрос: можно ли получить точную в смысле порядка роста оценку

$$|\lambda_k| \geqslant Ck^n \quad (C > 0,\ k = 1, 2, \dots)$$

для существующих собственных значений краевой задачи (21)—(22), а также оценку $D(\lambda)$, $D(t,s,\lambda)$? Ответу на этот вопрос и посвящен параграф.

А. О. Гельфонд [10] показал, что при наличии у функции $K(t,s)$ r ограниченных производных по t порядок $D(\lambda)$ не превосходит $2/(2r+1)$ и λ_k растут быстрее, чем $\lambda^{r+0.5-\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$. Функция Грина краевой задачи (21)—(22) в квадрате $0 \leqslant t, s \leqslant h$ дифференцируема $n-2$ раза по t. Поэтому для собственных значений справедлива оценка

$$|\lambda_k| \geqslant Ck^{n-1.5-\varepsilon}.$$

Доказательство Гельфонда можно видоизменить так, что получится оценка

$$|\lambda_k| > Ck^{n-0.5-\varepsilon}.$$

Из результатов И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [11] следует, что ε можно опустить. Остается зазор в 0.5. На этом пути улучшить оценку нельзя. Нужно учесть, что $n-1$-я производная функции Грина по t не только ограничена, но и имеет ограниченную вариацию. Уравнения с ядрами, имеющими такой запас гладкости, рассматривались в работе Э. Хилле и Я. Д. Тамаркина [12] при $d\mu = dt$. Они получили оценку

$$|\lambda_k| \geqslant \frac{Ck^n}{(\ln k)^{n-0.5}}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Э. Хилле и Я. Д. Тамаркин предположили, что наличие логарифма связано с методом доказательства и что от этого множителя можно избавиться. Данный параграф посвящен доказательству этой гипотезы. Схема доказательства состоит в следующем. Ядро представляется в виде

$$K(t,s) = K_0(t,s) + K_1(t,s),$$

где ядро $K_0(t,s)$ вырождено, а $K_1(t,s)$ удовлетворяет условию

$$K_1^{(i)}(0.s) = K_1^{(i)}(h,s), \quad i = 0, 1, \ldots, m, \quad 0 \leqslant s \leqslant h. \tag{23}$$

Здесь производные берутся по t. Функция $K_1(t,s)$ при каждом фиксированном s разлагается в ряд Фурье по тригонометрической системе

$$\left\{\exp\left(\frac{2i\pi n}{h}t\right)\right\}.$$

Соотношения (23) обеспечат нужный порядок убывания коэффициентов Фурье. Отметим, что при доказательстве оценки роста собственных значений используются некоторые приемы из статьи Гельфонда [10].

Отметим, что результаты этого параграфа содержатся только в краткой заметке в ДАН СССР [13].

Во втором параграфе на основе оценок роста собственных значений интегральных уравнений исследуются некоторые структурные свойства функции Грина $G(t,s)$ (гладкость функции Грина, скорость стремления $G(t,s)$ к пределу при $s \to a$ и $s \to b$) краевой задачи для уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

с краевыми условиями вида (22). Обсуждаются некоторые приложения к вопросам разрешимости краевых задач. Кроме того, получена формула следов

$$\sum_i \frac{1}{\lambda_i} = \int\limits_a^b G(t,t)q(t)\,dt, \tag{24}$$

где сумма берется по всем собственным значениям λ_i.

В третьем параграфе для двучленного уравнения порядка $n \geqslant 2$

$$x^{(n)} + q(t)x = 0, \quad a \leqslant t \leqslant b$$

изучаются краевые задачи вида

$$x(a) = \dot{x}(a) = \dots = x^{(n-k-1)}(a) = x(b) = \dot{x}(b) = \dots = x^{(k-1)}(b),$$

где $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Используется формула следов (24). Рассматриваются некоторые другие вопросы (интегральный признак неосцилляции для двучленного уравнения, применимость теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, обобщение результата Я. Микусинского и др.).

Третья глава посвящена вопросам неосцилляции решений уравнений n-го порядка

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0, \quad -\infty \leqslant \alpha < t < \beta \leqslant \infty. \tag{25}$$

Промежуток $J \subset (\alpha, \beta)$ называется промежутком неосцилляции для уравнения (25), если каждое нетривиальное решение уравнения (25) имеет в J не более $n-1$ нулей в (α, β).

Как отмечает А. Ю. Левин, целый комплекс внешне разнообразных вопросов — дифференциальные неравенства, представление оператора L в виде произведения n вещественных дифференциальных операторов первого порядка, разрешимость интерполяционных краевых задач, вопросы перемежаемости нулей, ляпуновские зоны устойчивости для уравнения Хилла, свойства чебышевских и декартовых систем функций, осцилляционность (по Гантмахеру — Крейну) функций Грина краевых задач, теоремы о среднем значении и т. п. — самым тесным образом связан с вопросом о неосцилляции решений уравнения (25). Поэтому вопрос о неосцилляции решений является одним из центральных в качественной теории этого уравнения.

Глава состоит из пяти параграфов, приложения и дополнения.

Остановимся только на самом ярком результате.

Установлен общий критерий неосцилляции для уравнения (25) в терминах существования n функций с определенными свойствами. При $n = 2$ этот критерий переходит в классический критерий Валле-Пуссена. Различные конкретизации соответствующих функций приводят к улучшению и обобщению известных ранее признаков неосцилляции. В качестве следствия получен и новый эффективный признак неосцилляции. Сформулируем его.

Если корни $\lambda_i(t)$ уравнения

$$\lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}(t)\lambda + p_n(t) = 0$$

при всех $t \in (-\infty, \infty)$ вещественны и разделены постоянными, т.е.

$$\lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t),$$

то $(-\infty, \infty)$ — промежуток неосцилляции для уравнения (25).

Для иерархической фундаментальной системы решений уравнения (25) *при дополнительных условиях $\nu_0 \leqslant \lambda_1(t)$, $\lambda_n(t) \leqslant \nu_n$ и достаточно больших t справедливы неравенства*

$$c_i e^{\nu_{i-1}t} \leqslant x_i(t) \leqslant d_i e^{\nu_i t}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где c_i, d_i — некоторые положительные постоянные.

В дополнении проводится сравнение полученных результатов с результатами работы известного американского математика Ф. Хартмана. Отметим, что в 1968 году появилась его небольшая заметка [14], в которой для уравнений n-го порядка были анонсированы утверждения, близкие к некоторым результатам этой главы диссертации. В частности, в дополнении показывается, что некоторые утверждения в статье Хартмана не вполне корректны. Подробные статьи А. Ю. Левина [15] и Ф. Хартмана [16] вышли практически одновременно.

Четвертая глава состоит из трех параграфов. В этой главе рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (-\infty < a \leqslant t < b \leqslant \infty), \tag{26}$$

где $p(t)$ и $q(t)$ вещественны и $q(t)$ не меняет знака на $[a, b)$, в неколебательном случае (т.е. в случае, когда каждое нетривиальное решение уравнения (26) имеет на интервале $[a, b)$ конечное число нулей) при $t \to b$. Приводится полная классификация возможных типов фундаментальных систем решений уравнения (26), учитывающая следующие характеристики поведения решений при $t \to b$: стремление к нулю, к ненулевому пределу, к бесконечности, возрастание или убывание вблизи b (в неколебательном случае каждое решение монотонно вблизи b). Оказывается, что определяющую роль играет сходимость или расходимость четырех интегралов, построенных по функциям $p(t)$ и $q(t)$. Приведем эти интегралы

$$\mathfrak{J}_1(p) = \int^b \exp\left(-\int^t p(\tau)\, d\tau \right) dt, \quad \mathfrak{J}_2(p,q) = \int^b q(t) \exp\left(\int^t p(\tau)\, d\tau \right) dt,$$

$$\mathfrak{J}_3(p,q) = \int^b q(t) \int_t^b \exp\left(\int_s^t p(\tau) d\tau \right) ds\, dt, \quad \mathfrak{J}_4(p,q) = \int^b q(t) \int^t \exp\left(\int_s^t p(\tau) d\tau \right) ds\, dt.$$

В последнем параграфе рассмотрены приложения полученных результатов к вопросам колебательности. В заключение параграфа обсуждается задача преобразования уравнения (26) в уравнение вида

$$\ddot{x} + \bar{q}(t)x = 0.$$

Для уравнений с ω-периодическими коэффициентами предлагается новое преобразование такого типа. Результаты этой главы изложены в статье [17].

Литература

1. *Hille, E.* Non-oscillation theorems / E. Hille // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1948. — Vol. 64, no. 2. — P. 234—258.
2. *Wintner, A.* On a theorem of Bôcher in the theory of ordinary linear differential equations / A. Wintner // *Amer. J. Math.* — 1954. — Vol. 76. — P. 183—190.
3. *Аткинсон, Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М.: Мир, 1968. — 748 с.
4. *Левин, А. Ю.* К вопросу о нулевой зоне устойчивости / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1962. — Т. 145, № 6. — С. 1221—1223.

5. *Левин, А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. II / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. — Ярославль, 1974. — Вып. 8. — С. 122—144.
6. *Ляпунов, А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 473 с.
7. *Арнольд, В. И.* Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд // *Функц. анализ и его прил.* — 1970. — Т. 4:3. — С. 1—9.
8. *Крейн, М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости / М. Г. Крейн // *ПММ.* — 1951. — Т. 15, вып. 3. — С. 323—348.
9. *Колесов, Ю. С.* О доказательстве теоремы Левина о полупериоде / Ю. С. Колесов // *Дифф. уравнения.* — 2005. — Т. 41, № 8. — С. 1181—1184.
10. *Гельфонд, А. О.* О росте собственных значений однородных интегральных уравнений / А. О. Гельфонд // Ловитт, У. В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М.: Гостехиздат, 1957. — С. 233—263.
11. *Гохберг, И.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Гохберг, М. Крейн. — М.: Наука, 1965. — Р. 448.
12. *Hille, E.* On the characteristic values of linear integral equations / E. Hille, J. D. Tamarkin // *Acta Math.* — 1931. — Vol. 57. — P. 1—76.
13. *Левин, А. Ю.* Уравнение Фредгольма с гладким ядром и краевые задачи для линейного дифференциального уравнения / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1964. — Т. 159, № 1. — С. 13—16.
14. *Hartman, P.* Disconjugate n-th order differential equations and principal solutions / P. Hartman // *Bull. Am. Math. Soc.* — 1968. — Vol. 74. — P. 125—129.
15. *Левин, А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\dots+p_n(t)x = 0$ / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1969. — Т. 24, № 2(146). — С. 43—96.
16. *Hartman, P.* Principal solutions of diconjugate n-th order linear differential equations / P. Hartman // *Am. J. Math.* — 1969. — Vol. 91. — P. 306—362.
17. *Левин, А. Ю.* Поведение решений уравнения $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0$ в неколебательном случае / А. Ю. Левин // *Матем. сб.* — 1968. — Т. 75 (117), № 1. — С. 39—63.

В. Ш. Бурд

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация, состоящая из четырех глав, посвящена одному из разделов классического анализа — качественной теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. Изучаются также системы линейных уравнений и интегральные уравнения, однако угол зрения, под которым они рассматриваются, в большинстве случаев так или иначе связан со спецификой дифференциального уравнения n-го порядка.

Основные исследуемые вопросы: неосцилляция решений (эта тема доминирует в третьей главе, но проходит в том или ином виде через все главы); непрерывная зависимость решений от параметра и обобщенные уравнения (первая глава); асимптотическое поведение решений при $t \to \infty$ (этот вопрос затрагивается в первой, третьей и четвертой главах); фредгольмовские характеристики ядер с запасом гладкости, характерным для функций Грина одномерных краевых задач (вторая глава).

Часть первой главы и вся вторая глава посвящена уравнениям второго порядка; в других разделах порядок уравнения произволен.

Первая глава — «Непрерывная зависимость от параметра решений задачи Коши. Обобщенные уравнения» — состоит из четырех параграфов.

Небольшой § 1 посвящен задаче Коши для уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x + p_{n+1}(t) = 0 \quad (a < t \leqslant b), \tag{1}$$

где комплекснозначные $p_i(t)$, $i = 1, \ldots, n+1$ локально суммируемы в $(a, b]$. Как должны вести себя $p_i(t)$ вблизи $t = a$, чтобы задача Коши

$$x^{(i-1)}(a) = c_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

имела решения при любых $c_1, \ldots, c_n$? Ответ на этот вопрос дает ранее, по-видимому, не отмечавшаяся

Теорема 1.1. *Для разрешимости задачи* (1)—(2) *при любых $c_1, c_2, \ldots, c_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходились (вообще говоря, неабсолютно) интегралы*

$$\int\limits_a p_1(t)\,dt, \quad \int\limits_a \Big(\exp \int\limits^t p_1(s)\,ds\Big) p_i(t)\,dt, \quad i = 2, 3, \ldots, n+1.$$

(Непроставленные пределы интегрирования выбираются в (a, b) произвольно, так как не влияют на сходимость.)

Хотя конечность точки $t = a$ является для теоремы 1.1 существенной, эта теорема, благодаря соответствующим заменам, находит приложения и в исследовании асимптотики решений при $t \to \infty$. В частности, для уравнения

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \quad (t_0 \leqslant t < \infty) \tag{3}$$

с помощью теоремы 1.1 доказывается

Следствие 1.1. *В том и только том случае, если сходится*

$$\int^{\infty} t^2 q(t)\,dt, \tag{4}$$

уравнение (3) *обладает решениями* x_1, x_2 *вида*

$$\begin{aligned} &x_1(t) = t + o(1), && \dot{x}_1(t) = 1 + o\Big(\frac{1}{t}\Big), \\ &x_2(t) = 1 + o\Big(\frac{1}{t}\Big), && \dot{x}_2(t) = o\Big(\frac{1}{t^2}\Big), \end{aligned} \qquad (t \to \infty).$$

Аналогичный результат был ранее установлен Э. Хилле [1] (см. также А. Халанай [2]) для случая, когда $q(t)$ вещественна и знакопостоянна. Отметим, что методика работ [1, 2] неприменима при неабсолютной сходимости интеграла (4).

В § 2 изучается непрерывная зависимость от параметра решений линейных систем и уравнений n-го порядка. Вопросы предельного перехода изучали ранее И. И. Гихман [3], М. А. Красносельский и С. Г. Крейн [4], Я. Курцвейль и З. Ворел [5], Г. Антосевич [6], В. Рейд [7] и другие авторы. Большинство упомянутых работ связано с принципом усреднения Боголюбова – Крылова в нелинейной механике. Мы ограничиваемся линейным случаем, для которого удается получить результаты, весьма близкие к окончательным.

Далее используется обозначение $F^V(t) = \displaystyle\int_a^t F(s)\,ds$; знак «$\Rightarrow$» означает равномерную на $[a,b]$ сходимость.

Рассматриваются матричные уравнения

$$\dot{X}_k(t) = A_k(t)X_k, \quad X_k(a) = I \quad (a \leqslant t \leqslant b),\ k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

с суммируемыми на $[a,b]$ $A_k(t)$ (однородность не ограничивает общности, так как неоднородные уравнения сводятся к однородным с помощью введения фиктивных переменных). Ставится вопрос об условиях, обеспечивающих соотношение

$$X_k(t) \Rightarrow X_0(t), \quad (k \to \infty). \tag{6}$$

Наряду с (5) рассмотрим последовательность уравнений

$$\dot{U}_k = \big[A_k(t) + B_k(t)\big]U_k, \quad U_k(a) = I \quad (a \leqslant t \leqslant b),\ k = 0, 1, \ldots,$$

для которой можно поставить аналогичный вопрос о соотношении

$$U_k(t) \Rightarrow U_0(t), \quad (k \to \infty). \tag{7}$$

Теорема 2.1. *Если последовательность матриц-функций* $\big\{B_k(t)\big\}$ *такова, что*

$$B_k^V(t) \Rightarrow B_0^V(t) \quad (k \to \infty), \qquad \int\limits_a^b \|B_k(t)\|\,dt \leqslant c < \infty \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

то соотношения (6) *и* (7) *эквивалентны.*

Это предложение позволяет эффективно редуцировать одни задачи к другим, более простым, а иногда даже к решающимся в квадратурах. Именно так обстоит дело, в частности, с уравнениями n-го порядка

$$x_k^{(n)} + p_{1,k}(t)x_k^{(n-1)} + \cdots + p_{n,k}(t)x_k + p_{n+1,k}(t) = 0 \ \ (a \leqslant t \leqslant b), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

После перехода к однородной матричной форме и выбора соответствующих $B_k(t)$ (которые в данном случае не зависят ни от k, ни от t и состоят из нулей и единиц) получается

Теорема 2.2. *Для того чтобы при $k \to \infty$ решения уравнений* (8) *с любыми начальными условиями сходились в $C^{n-1}[a,b]$ к соответствующему решению уравнения* (1)*, необходимо и достаточно, чтобы при $k \to \infty$*

$$\int\limits_a^t [p_{1,k}(\tau) - p_1(\tau)]\, d\tau \;\Rightarrow\; 0,$$

$$\int\limits_a^t \left(\exp \int\limits_a^s [p_{1,k}(\tau) - p_1(\tau)]\, d\tau \right) (p_{i,k}(s) - p_i(s))\, ds \;\Rightarrow\; 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n+1.$$

При доказательстве теорем 1.1 и 2.2 существенно используется специфическая структура матрицы коэффициентов соответствующей системы. Весьма интересный вопрос о возможности получения столь же окончательных результатов для линейных систем общего вида остается открытым. Ясно, в частности, что условие

$$R_k^V(t) \Rightarrow 0 \;\; \text{при} \;\; k \to \infty \quad (R_k \overset{Df}{=} A_k - A_0) \tag{9}$$

не является ни необходимым, ни достаточным для (6). Ситуация меняется, если наложить некоторые дополнительные предположения.

Теорема 2.3. *Пусть выполнено по крайней мере одно из соотношений*

1) $\displaystyle\int_a^b ||R_k(t)||\, dt \leqslant c < \infty \;\; (k = 1, 2, \ldots);$

2) $\displaystyle\int_a^b ||R_k(t) R_k^v(t)||\, dt \to 0 \;\; (k \to \infty);$

3) $\displaystyle\int_a^b ||R_k^v(t) R_k(t)||\, dt \to 0 \;\; (k \to \infty);$

4) $\displaystyle\int_a^b ||R_k(t) R_k^v(t) - R_k^v(t) R_k(t)||\, dt \to 0 \;\; (k \to \infty).$

Тогда условие (9) *необходимо и достаточно для* (6).

В части, относящейся к достаточности, случай 1) подчинен остальным и поэтому не представляет интереса; в остальном 1) — 4) попарно независимы. При доказательстве используется теорема 2.1, а для наиболее содержательного случая 4) также и

Лемма 2.5. *В любой точке дифференцируемости матрицы-функции $F(t)$ справедливы неравенства*

$$\left.\begin{array}{l} \left\| \dfrac{d}{dt} e^{F(t)} - \dot{F}(t) e^{F(t)} \right\| \\ \left\| \dfrac{d}{dt} e^{F(t)} - e^{F(t)} \dot{F}(t) \right\| \end{array} \right\} \leqslant \frac{1}{2} e^{||F(t)||} ||\dot{F}(t) F(t) - F(t) \dot{F}(t)||.$$

Эта оценка находит приложение и в других вопросах. Одно из таких приложений приводится в диссертации. Рассмотрим задачу о существовании у матричного уравнения

$$\dot{X} = A(t)X \quad (a \leqslant t < \infty) \tag{10}$$

с локально суммируемой в $[a, \infty)$ $A(t)$ решения вида

$$X(t) = I + o(1) \quad (t \to \infty). \tag{11}$$

В терминологии Л. Чезари [8] это — задача о линейном асимптотическом равновесии. А. Винтнер [9] доказал следующее. Пусть $A(t)$ интегрируема в $[a, \infty)$ (вообще говоря, неабсолютно), т. е.

$$\text{существует } A^0(t) = \int\limits_t^\infty A(s)\,ds \tag{12}$$

и, кроме того,

$$\int^\infty ||A^0(t)A(t)||\,dt < \infty, \text{ либо } \int^\infty ||A(t)A^0(t)||\,dt < \infty.$$

Тогда уравнение (10) обладает решением вида (11). С помощью леммы 2.5 устанавливается дополняющее результат Винтнера

Следствие 2.2. *Пусть выполнено* (12) *и, кроме того,*

$$\int^\infty ||A^0(t)A(t) - A(t)A^0(t)||\,dt < \infty.$$

Тогда уравнение (10) *обладает решением вида* (11).

Результаты § 2 позволяют, в частности, легко объяснить сходимость решений в конкретном примере, послужившем, согласно Я. Курцвейлю, отправным пунктом для работы [10] и объясненном в этой работе лишь частично, при излишних ограничениях.

Ряд результатов первых дух параграфов сохраняет силу и в более общих ситуациях — для бесконечных промежутков, в случае комплексного переменного (при коэффициентах, аналитических в односвязной области), для абстрактных уравнений и т. п.

Между фактами, изложенными в § 1 и 2, существует определенная родственность, которая становится прозрачной, если встать на точку зрения обобщенных дифференциальных уравнений. Очерк теории таких уравнений (опять-таки для линейного случая) дается в § 3.

Имеется несколько подходов к обобщенным уравнениям; точкой отправления служит обычно либо замена дифференциального уравнения интегральным с расширенной — в духе теории функций вещественной переменной — трактовкой интеграла, либо предельный переход, когда множество уравнений «пополняется» с учетом непрерывной (в том или ином смысле) зависимости решений. Обе эти концепции, конечно, связаны: вторая из них, более аналитическая по характеру, обладает определенными преимуществами. Основное внимание в § 3 уделяется уравнениям с импульсными (т. е. содержащими компоненты типа δ-функций) коэффициентами. Такое уравнение может быть записано в виде

$$\dot{X} = \dot{M}(t)X, \quad X(a) = I \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{13}$$

(ни однородность, ни фиксация начального условия не ограничивает общности), где разрывная, вообще говоря, $M(t) = ||m_{ij}||_1^n$ имеет ограниченную вариацию в $[a, b]$. Что понимать под решением уравнения (13)? Ввиду разрывности $M(t)$ подход Курцвейля [10], связанный с оценками модуля непрерывности $M(t)$, здесь неприменим. Если трактовать (13) как интегральное уравнение

$$X(t) = I + \int_a^t dM(s)X(s) \qquad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{14}$$

понимая интеграл в смысле Римана—Стильтьеса либо, более общо — в смысле Дарбу—Стильтьеса (мы пользуемся терминологией [11]), то возникают осложнения в связи с существованием этого интеграла; из самого уравнения (14) явствует, что $X(t)$ не может быть непрерывна в точках разрыва $M(t)$. Видимо, по этой причине общая теория уравнения (13) до последнего времени не развивалась, хотя отдельные уравнения с импульсными коэффициентами встречаются в приложениях. В недавней монографии Ф. Аткинсона [12] решения подобных уравнений определяются как матрицы-функции, удовлетворяющие (14), где интеграл вводится некоторым специальным образом. Это определение решения, не подкрепленное соображениями предельного перехода, вполне пригодно для некоторых частных случаев. В общем же плане оно, по нашему мнению, неудовлетворительно, т. к. приводит не к тем решениям, которые представляются естественными с точки зрения «физического смысла» импульсных коэффициентов.

Для реализации этой точки зрения будем аппроксимировать (13) уравнениями

$$\dot{X}_k = \dot{M}_k(t)X_k, \quad X_k(a) = I \quad (a \leqslant t \leqslant b) \;\; k = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

с абсолютно непрерывными $M_k(t) = ||m_{ij}^k(t)||_1^n$ (таким образом (15) суть обычные уравнения с суммируемыми коэффициентами). Условия аппроксимации имеют вид:

$$m_{ij}^k(t) \;\to\; m_{ij}(t) \;\; (a \leqslant t \leqslant b) \;\; \text{при } k \to \infty \tag{16}$$

$$V_a^b m_{ij}^k(t) \;\to\; V_a^b m_{ij}(t) \;\; (a \leqslant t \leqslant b) \;\; \text{при } k \to \infty \tag{17}$$

для любых $i, j \in [1, n]$. Здесь и далее через $V_a^b(\cdot)$ обозначается вариация на $[a, b]$. Уравнение (13) назовем δ-корректным, если при любой последовательности $\{M_k(t)\}$, удовлетворяющей (16) и (17), решения уравнений (15) имеют конечный предел:

$$X_k(t) \to X(t) \;\; (a \leqslant t \leqslant b) \text{ при } k \to \infty.$$

В этом случае предельную матрицу-функцию $X(t)$ (не зависящую, очевидно, от выбора $\{M_k(t)\}$) естественно принять за решение δ-корректного уравнения (13).

Аппроксимация (16)–(17) выглядит несколько необычно; в частности, она носит нелинейный характер (из такой «сходимости» M_k к M не вытекает «сходимость» $M_k - M$ к нулю). Это связано с существом дела. Например, равномерная сходимость здесь заведомо непригодна, т. к. нужно разрывные функции аппроксимировать непрерывными; поэтому здесь неприменимы результаты § 2 и, в частности, теорема 2.3. Не подходят (по другим причинам) и различные варианты «слабых» сходимостей; в частности, (17) нельзя заменить стандартным требованием $V_a^b m_{ij}^k(t) \leqslant c < \infty \;\; (k = 1, 2, \ldots)$.

Показано, что всякую $M(t)$ ($V_a^b M < \infty$) можно аппроксимировать в смысле (16)–(17) гладкими $M_k(t)$. Обозначая через Ω_f^+, Ω_f^- множества точек разрыва соответственно справа и слева функции $f(t)$ в $[a, b]$, имеем следующий критерий δ-корректности.

Теорема 3.1. *Уравнение* (13) *δ-корректно в том и только том случае, если для любых трех индексов $i, j, k \in [1, n]$, среди которых хотя бы два различны,*

$$\Omega^+ m_{ij} \cap \Omega^+ m_{ki} = \Omega^- m_{ij} \cap \Omega^- m_{ki} = \varnothing. \tag{18}$$

Отметим, что (18) накладывает меньшие ограничения на $M(t)$, чем требования существования интеграла в (14) по Дарбу—Стильтьесу (тем более, по Риману—Стильтьесу). Если (18) не выполняется, то решение (13) целесообразно определить с помощью мультипликативного интеграла Дарбу—Стильтьеса, близкого к тому, который был введен В. П. Потаповым [13] (не вполне корректно, что, впрочем, не влияет на справедливость других результатов этой фундаментальной работы). Такое определение решения $X(t)$ обладает серьезными преимуществами по сравнению с определением Ф. Аткинсона (существование $X^{-1}(t)$, совпадение в δ-корректном случае с решением, определенным на основе предельного перехода, и т. п.).

Для уравнений n-го порядка указаны улучшенные формулировки, не связанные с ограниченностью вариации коэффициентов.

В § 4 демонстрируется приложение уравнений с импульсными коэффициентами в классическом вопросе об устойчивости решений уравнения

$$\ddot{x} + q(t)x = 0, \tag{19}$$

где $q(t)$ — ω-периодическая вещественная локально суммируемая функция; предполагается, кроме того, что $q(t)$ неотрицательна в среднем (это условие может быть ослаблено). Как известно, впервые глубокое исследование этого вопроса осуществлено Ляпуновым [14]. В частности, общеизвестен найденный им признак устойчивости, который в несколько более общей редакции М. Г. Крейна [15] (связанной с отказом от знакопостоянства q) имеет вид

$$\int\limits_0^\omega q_+(t)\, dt \leqslant \frac{4}{\omega}. \tag{20}$$

Здесь и далее используется обозначение

$$f_+ = \max\{0, f(t)\}, \quad f_- = \max\{0, -f(t)\}. \tag{21}$$

Позднее были найдены некоторые обобщения признака (20). М. Г. Крейн [15] и В. А. Якубович [16] получили, в частности, признак устойчивости

$$\int\limits_0^\omega [q(t) - a^2]_+\, dt \leqslant 2a \operatorname{ctg} \frac{\omega a}{2} \text{ при некотором } a \in \left[0, \frac{\pi}{\omega}\right], \tag{22}$$

содержащий (20) как предельный случай при $a = 0$. Как известно, правые части в (20), (22) не могут быть увеличены. З. Опяль в работе [17] (послужившей для автора стимулирующим толчком) предложил достаточное условие устойчивости, где в отличие от (22) интеграл берется не по $[0, \omega]$, а по промежуткам $[\tau, \tau + \omega/4]$ со «скользящими» концами; например, при $a = 0$ это условие имеет вид

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega/4} q_+(t)\,dt \leqslant \frac{6 - 2\sqrt{5}}{\omega} \quad (0 \leqslant \tau < \omega). \tag{23}$$

По поводу дальнейших результатов, относящихся к нулевой и другим зонам устойчивости, см. В. М. Старжинский [18].

Теорема 4.1. *Решения уравнения* (19) *устойчивы, если при некотором* $a \in \big[0, \pi/\omega\big]$ *и некотором натуральном* n *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega/n} [q(t) - a^2]_+\,dt \leqslant 2a\frac{\cos\frac{\omega a}{n} - \cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\omega a}{n}} \quad (0 \leqslant \tau < \omega). \tag{24}$$

В предельном случае $a = 0$ (24) принимает вид

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega/n} q_+(t)\,dt \leqslant \frac{2n(1 - \cos\dfrac{\pi}{n})}{\omega} \quad (0 \leqslant \tau < \omega). \tag{25}$$

Правые части (24) и (25) не могут быть увеличены. Совпадение правой части (25) при $n = 1$ и $n = 2$ показывает, что классическое неравенство (20) может быть заменено менее ограничительным условием

$$\int\limits_{\tau}^{\tau+\omega/2} q_+(t)\,dt \leqslant \frac{4}{\omega} \quad (0 \leqslant \tau < \omega).$$

Подобное замечание относится и к общему условию (24): при $n = 1$ оно переходит в (22), но т. к. правая часть (24) одинакова при $n = 1$ и $n = 2$, то и в (22) интеграл по периоду может быть заменен интегралом по каждому полупериоду.

При $n = 4$ теорема 4.1 усиливает упоминавшийся выше результат З. Опяля [17] (вопреки имеющемуся в [17] утверждению о неулучшаемости). В частности, максимальное значение константы в признаке устойчивости типа (23) равно не $6 - 2\sqrt{5} (\approx 1.54)$, а $8 - 4\sqrt{2} (\approx 2.34)$.

В доказательстве теоремы 4.1 существенную роль играют уравнения вида (19) с обобщенной $q(t)$ и экстремальные свойства решений таких уравнений. По известной схеме [19], [20] вопрос сводится к оценке расстояний между соседними нулями решений, после чего к обобщенным уравнениям применяется своеобразный интегральный аналог теоремы сравнения Штурма. Приведем здесь соответствующую формулировку лишь для классического случая.

Наряду с (19) рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + q_1(t)x = 0. \tag{26}$$

Предполагается, что $q(t), q_1(t)$ — вещественные суммируемые функции.

Следствие 4.1. *Пусть уравнение* (19) *обладает решением* $x(t) \not\equiv 0$ *таким, что*

$$x(t_1) = x(t_2) = \dot{x}(t_0) \quad (t_1 < t_0 < t_2).$$

Если выполнено неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} q(s)d(s) \leqslant [\mathrm{sign}(t-t_0)] \int\limits_{t_0}^{t} q_1(s)\,ds \quad (t_1 < t < t_2),$$

то каждое решение уравнения (26) *имеет по крайней мере один нуль в* $[t_1, t_2)$.

Переходим ко второй главе. Она озаглавлена «Уравнения Фредгольма с гладким ядром и одномерные краевые задачи» и состоит из трех параграфов. Большая часть этой главы была кратко изложена в [21].

Хотя § 1 посвящен фредгольмовскому уравнению

$$x(t) = \lambda \int\limits_{a}^{b} K(t,s)x(s)d\mu(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{27}$$

характер накладываемых на $K(t,s)$ ограничений обусловлен связью этого уравнения с краевой задачей

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = \lambda q(t)x \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{28}$$

$$l_i[x] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \ \ (n \geqslant 2). \tag{29}$$

Здесь l_i — линейные (и линейно независимые) функционалы в $C^{n-1}[a,b]$, комплекснозначные $p_i(t)$, $q(t)$ суммируемы в $[a,b], q(t) \not\equiv 0$. Задача (28)–(29), если она невырождена, может быть записана в виде (27), где $K(t,s)$ — функция Грина и $\mu(t) = \int\limits_{a}^{t} q(s)\,ds$.

Известен ряд результатов о росте собственных значений задачи (28)–(29), главным образом для двухточечного случая (см. [22], [23]). Обычно при дополнительных предположениях о структуре краевых условий (регулярность и т. п.) и о гладкости функции $q(t)$ (часто предполагается, что $q(t) \equiv const$) устанавливается асимптотическая формула вида: $\lambda_k \sim ck^n$ при $k \to \infty$. С другой стороны, известно также, что с увеличением гладкости ядра, грубо говоря, возрастает скорость роста $\lambda_k \ \ (k \to \infty)$, и, соответственно, понижается скорость роста $D(\lambda)$, $D(t,s,\lambda) \ \ (\lambda \to \infty)$. Между этими двумя подходами существует очевидная связь, поскольку гладкость функции Грина растет с ростом порядка уравнения. Однако до недавнего времени в теории уравнения (27) отсутствовало предложение, позволяющее с общих позиций получить для собственных значений задачи (28)–(29) оценку

$$|\lambda_k| \geqslant ck^n \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{30}$$

Мы говорим об оценке (30), а не об асимптотической формуле для λ_k, поскольку хотим отвлечься от таких специфических свойств функции Грина, как единый скачок ее $(n-1)$-ой производной на диагонали $t = s$, и характеризовать запас гладкости в общих терминах. Отнюдь не безразлично, кстати, какие именно термины выбрать. Если, например, описывать гладкость ядра числом непрерывных производных по какой-либо из переменных, как это делается в теореме 1 из [24], то применительно к задаче (28)–(29) получим оценки для λ_k, $D(\lambda)$, $D(t,s,\lambda)$, далекие от точных по порядку. Как выяснилось, ключевым здесь является то обстоятельство, что $(n-1)$-ая производная по t функции Грина имеет вариацию по t, равномерно ограниченную по s (для самих оценок, как будет видно, равномерная ограниченность может быть заменена суммируемостью). Ядра с таким запасом гладкости рассматривались (вне связи с краевыми задачами и без непосредственных оценок $D(\lambda)$, $D(t,s,\lambda)$) Э. Хилле и Я. Тамаркиным в статье [25], наряду с другими классами ядер. Именно, в [25] получена оценка

$$|\lambda_k| \geqslant ck^n(\ln k)^{0.5-n} \quad (k=1,2,\dots) \tag{31}$$

и высказано предположение, что наличие логарифмического множителя обусловлено методикой доказательства. Эта гипотеза находит свое подтверждение в § 1 (для $n>1$).

На комплекснозначные $K(t,s), \mu(s)$ в § 1 накладываются следующие ограничения: $K(t,s)$ μ-измеримо как функция s и почти при всех s (по μ-мере)

$$|K(t,s)| \leqslant g(s), \quad V_a^b K^{(m)}(t,s) \leqslant g(s)$$

для некоторого натурального m (вариация и дифференцирование по первому аргументу), причем $g(s)$ такова, что

$$\int_a^b g(s)|d\mu(s)| \leqslant c_0 < \infty.$$

Не требуется непрерывности ни K по s, ни $K^{(m)}$ по t (существенно лишь, чтобы $K^{(m-1)}$ была первообразной от $K^{(m)}$).

Теорема 1.1. *При сделанных допущениях числитель $D(t,s,\lambda)$ (почти при всех s по μ-мере) и знаменатель $D(\lambda)$ резольвенты Фредгольма для уравнения* (27) *являются целыми функциями порядка не выше $(m+1)^{-1}$, а все существующие характеристические значения λ_k удовлетворяют неравенству*

$$|\lambda_k| \geqslant ck^{m+1} \quad (k=1,2,\dots), \quad \textit{где} \quad c = c_0^{-1} f(m, b-a) > 0. \tag{32}$$

Как и обычно, λ_k считаются занумерованными в порядке возрастания модулей $(0<|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \dots)$ с учетом кратности корней $D(\lambda)$.

Из того, что порядок $D(\lambda)$ меньше 1, вытекает, в частности, равенство

$$D(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right). \tag{33}$$

При доказательстве теоремы 1.1 приемы, заимствованные (и определенным образом видоизмененные) из статьи А. О. Гельфонда [24], сочетаются с известными фактами об убывании коэффициентов Фурье гладких функций и некоторой модификацией оценок промежуточных производных по Колмогорову – Горни (см. [26]).

В § 2 мы переходим непосредственно к свойствам функции Грина $G(t,s)$ невырожденной задачи (28)–(29). Вначале исследуется гладкость $G(t,s)$ по t. Здесь подтверждается неравенство (интуитивно, впрочем, достаточно очевидное)

$$V_a^b G^{(n-1)}(t,s) \leqslant c_1 < \infty \quad (a \leqslant s \leqslant b),$$

откуда явствует, что интегральное уравнение, эквивалентное задаче (28)–(29), попадает в сферу действия теоремы 1.1 (при $m = n - 1$). В частности, получаем оценку (30) для собственных значений, а также вытекающую из (33) формулу следов

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k} = \int_a^b G(t,t)q(t)\,dt. \tag{34}$$

Отметим, что для справедливости соотношений (33)–(34) существенно лишь, что порядок $D(\lambda)$ меньше 1; поэтому при $n \geqslant 3$ здесь можно воспользоваться теоремой 1 из [24] (для того чтобы охватить случай $n = 2$, эта теорема нуждается в обобщении).

Если решения однородного уравнения $Lx = 0$ известны (например, если речь идет об уравнении $x^{(n)} = \lambda q(t)x$), константа c в оценке (30) может быть эффективно указана.

Далее изучается гладкость $G(t,s)$ по s и вместе с тем по совокупности переменных; ввиду специфической структуры $G(t,s)$ гладкость ее как функции двух переменных определяется гладкостью по каждой из переменных в отдельности. Если до сих пор конкретный вид краевых условий (29) не играл роли, то здесь он приобретает существенное значение. Удобно считать, что краевые условия записаны в форме

$$\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{ik} x^{(k)}(a) + \int_a^b x^{(n-1)}(t)\,dg_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n\ , \tag{35}$$

к которой (29) всегда можно привести; здесь $g_i(t)$ — функции ограниченной вариации, непрерывные справа внутри (a,b).

Легко проверяется, что невырожденная задача (28), (35) обладает непрерывной в квадрате $a \leqslant t,\ s \leqslant b$ функцией Грина тогда и только тогда, если все g_i непрерывны внутри (a,b). Вопрос о дифференцируемости $G(t,s)$ по s более сложен, поскольку здесь переплетается влияние коэффициентов p_i и «краевых функций» g_i. Приведем один из полученных в этом направлении результатов. Через $\tilde{g}_i(t)$ обозначена функция $g_i(t)$, переопределенная в точках $t = a,\ t = b$ по непрерывности справа и слева соответственно.

Следствие 2.2. *Если при некотором* $r \leqslant n - 2$

$$p_k(t) \in C^{r-k}[a,b], \quad k = 1, 2, \ldots, r, \tag{36}$$
$$\tilde{g}_k(t) \in C^{r-k}[a,b], \quad k = 1, 2, \ldots, r, \tag{37}$$

то (невырожденная) задача (28), (35) *обладает функцией Грина, r-кратно непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных в квадрате* $a \leqslant t,\ s \leqslant b$.

Условия (36)–(37) близки к необходимым; в частности, порядок гладкости не может быть понижен ни для какой из функций $p_k,\ \tilde{g}_k$ в отдельности.

Далее рассматривается вопрос о поведении $G(t,s)$ при стремлении s к концам $[a,b]$. Ограничиваясь для определенности случаем $s \uparrow b$, получаем оценку

$$|G(t,s)| \leqslant \left[\frac{(t-s)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i V_s^b g_i\right] \exp\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-s)^{k-1}}{(k-1)!} \int_s^b |p_k(t)|\,dt\right]. \tag{38}$$

Здесь $\xi_1, \dots, \xi_n$ — некоторые постоянные, зависящие от «степени невырожденности» задачи; через u_+, как и выше, обозначен $\max\{0, u\}$. Заменяя в (38) $(t-s)_+$ на $b-s$, получаем равномерную по t оценку. Из (38) непосредственно усматривается, что в случае непрерывности слева всех $g_i(t)$ в точке $t = b$ (и только в этом случае, как можно проверить) $G(t,s) \to 0$ при $s \uparrow b$, причем скорость такого стремления зависит от поведения g_i вблизи b. Если наложить дополнительное — и практически, как правило, выполненное — требование нестрогой монотонности $\operatorname{Re} g_i(t)$, $\operatorname{Im} g_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ вблизи b, то оценка (38) становится точной в смысле грубого порядка малости $G(t,s)$ $s \uparrow b$ для всех $t \in [a,b]$, за исключением конечного числа.

Частным случаем условий (29) являются многоточечные краевые условия

$$l_i[x] = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n-1} c_{ik}^{(j)} x^{(j)}(t_k) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{39}$$

где $a \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_m \leqslant b$; переход от (39) к форме (35) не составляет труда. Для этого класса краевых условий гладкость $G(t,s)$ по s и поведение ее при $s \downarrow a, s \uparrow b$ исследовались автором ранее в [27].

В заключение § 2 рассматривается одно приложение полученных характеристик убывания $G(t,s)$ при $s \downarrow a, s \uparrow b$. Решение уравнения

$$Lx = f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{40}$$

удовлетворяющее краевым условиям (29), дается формулой

$$x(t) = \int_a^b G(t,s) f(s)\, ds \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{41}$$

при любой $f(t)$, суммируемой в $[a,b]$. Пусть теперь последнее требование ослаблено до локальной суммируемости f в (a,b), т. е. не исключается наличие у f сингулярных особенностей в концах промежутка. Каковы должны быть эти особенности, чтобы решение задачи (29)–(40) существовало и представлялось формулой (41) с абсолютно сходящимся интегралом? Приведем здесь лишь формулировку, относящуюся к многоточечным условиям (39). Как и в [27], порядком точки t_k называется старший из порядков производных $x^{(j)}(t_k)$, входящих с ненулевым коэффициентом хотя бы в один функционал $l_i[x]$.

Следствие 2.3. *Пусть q и r — порядки точек $t_1 = a$ и $t_m = b$ соответственно. Решение невырожденной задачи* (39)–(40) *существует и представляется абсолютно сходящимся при всех t интегралом* (41) *в том и только том случае, если*

$$\int_a^b (t-a)^{n-q-1} (b-t)^{n-r-1} |f(t)|\, dt < \infty.$$

Отметим, что при этом в концах $[a,b]$, вообще говоря, происходит потеря гладкости решения: производные $x^{(i)}(a)$ при $i > q$ и $x^{(j)}(b)$ при $j > r$ могут не существовать. Другими словами, в концах промежутка $x(t)$ обладает, вообще говоря, лишь той гладкостью, которая обусловлена самими краевыми условиями.

Более специальным вопросам посвящен § 3, где, в частности, изучается двухточечная интерполяционная задача для двучленного уравнения:

$$x^{(n)} + \lambda q(t)x = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{42}$$

$$x(a) = \dot{x}(a) = \dots = x^{(n-k-1)}(a) = x(b) = \dot{x}(b) = \dots = x^{(k-1)} = 0. \tag{43}$$

Здесь $q(t)$ суммируема в $[a, b]$, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Рассматриваемая задача тесно связана с дифференциальными неравенствами и неосцилляцией (для двучленного уравнения).

Связь с предшествующими параграфами состоит, главным образом, в том, что отправным моментом для § 3 является формула следов (34). С помощью косвенных соображений удается без громоздких выкладок определить значения функции Грина данной задачи на диагонали $t = s$. Это приводит к следующей формуле следов для задачи (42)–(43)

$$\sum_i \frac{1}{\lambda_i} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)!(n-k-1)!} I[q]. \tag{44}$$

Здесь и далее используется обозначение

$$I[f] = \frac{1}{(n-1)(b-a)^{n-1}} \int\limits_a^b (t-a)^{n-1}(b-t)^{n-1} f(t)\, dt. \tag{45}$$

Рассмотрим вопрос об оценке по модулю снизу первого собственного значения $\lambda_1[q]$ задачи (44)–(45). Так как $|\lambda_1[q]|^{-1}$ можно трактовать как спектральный радиус соответствующего интегрального оператора, то обычные мажорантные соображения (см. [28]) с учетом знакопостоянства функции Грина оператора $\dfrac{d^n}{dt^n}$ при краевых условиях (43) приводят к неравенству $|\lambda_1[q]| \geqslant |\lambda_1[|q|]|$. Случай комплекснозначной q сводится таким образом к случаю $q \geqslant 0$, что позволяет воспользоваться глубокими исследованиями Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна [29–31], относящимися к интегральным уравнениям с т. н. осцилляционными ядрами. Из этих исследований явствует, что при $q \geqslant 0$ все собственные значения задачи (42)–(43) вещественны и одного знака. В итоге из (44) выводится

Теорема 3.1. *При любой $q(t)$ ($\not\equiv 0$) справедливо неравенство*

$$|\lambda_1[q]| > \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{I[|q|]}. \tag{46}$$

Полученная оценка является точной в количественном отношении: ни при каких k, n нельзя увеличить постоянную, стоящую в числителе, и, более того, весовая функция $(t-a)^{n-1}(b-t)^{n-1}$ в $I[|q|]$ не может быть уменьшена ни на каком подмножестве промежутка $[a, b]$ положительной меры.

Дальнейшие рассмотрения § 3 относятся к вещественному случаю. Естественно предположить, что в (46) $|q|$ можно заменить на q_- при четном k и на q_+ при нечетном k (мы пользуемся обозначениями (21)). В целом этот вопрос остается открытым, однако для некоторых частных случаев — $|n-2k| \leqslant 2$, $k = 1$, $k = n-1$ (и тем самым для $n < 7$) — он решается положительно. Случай $k = 1$ представляет интерес для дифференциальных неравенств. Говорят, что для оператора с вещественными коэффициентами

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(t)\frac{d}{dt} + p_n(t) \tag{47}$$

(единичный оператор при p_n для простоты опускается) справедлива на промежутке $[a, b]$ теорема Чаплыгина, если

$$\{u^{(i)}(a) = v^{(i)}(a),\ i = 0, \dots, n-1;\ Lu \geqslant Lv \text{ в } [a, b]\} \ \to\ u(t) \geqslant v(t) \text{ в } [a, b],$$

т. е. если функция Коши $K(t, s)$ неотрицательна при $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$.

Следствие 3.2. *Если $I[q_+| \leqslant (n-2)!$, то для $\dfrac{d^n}{dt^n} + q(t)$ на $[a, b]$ справедлива теорема Чаплыгина.*

Независимо от автора [21] к этому же результату пришел Ю. В. Комленко [32] из других соображений.

Говорят, что промежуток J есть промежуток неосцилляции для оператора (47), если каждое нетривиальное решение уравнения $Lx = 0$ имеет в J не более $n-1$ нуля с учетом кратности. Это обстоятельство здесь и далее кратко записывается в виде $L \in T_0 J$ (таким образом, $T_0 J$ — класс операторов (47), имеющих J промежутком неосцилляции).

При «разделении» q_+ и q_- оказывается полезным один из простых случаев ($l = 0$, $m = 2$) следующего предложения.

Теорема 3.2. *Пусть $L \in T_0[a, b]$ и $x(t)$ — неотрицательное решение уравнения $Lx + q(t)x = 0$ такое, что*

$$x(t_i) = \dot{x}(t_i) = \dots = x^{(r_i - 1)}(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $m \geqslant 2$, $a = t_1 < \dots < t_m = b$ и числа r_i четны при $1 < i < m$. Если для некоторых $a_1, a_2, \dots, a_l$ $\quad (a \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_l \leqslant b;\ l \geqslant 0)$

$$(-1)^{r_m}(t - a_1)(t - a_2)\dots(t - a_l)q(t) \geqslant 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{48}$$

то $r_1 + r_2 + \dots + r_m < n + l$.

В случае $l = 0$ сомножители $t - a_i$ в (48) отсутствуют; при $m = 2$, естественно, отпадает требование четности r_i. Теорема 3.2 обобщает один результат Я. Микусинского [33], рассмотревшего случай $L = \dfrac{d^n}{dt^n}$, $l = 0$, $q(t) > 0$ (при четном r_m). Отметим еще, что частный случай $l = 1$, $m = 2$ теоремы 3.7 находит применение в вопросах, связанных с дифференциальными неравенствами.

Сопоставление изложенных фактов приводит к следующему интегральному признаку неосцилляции для двучленных операторов (в обозначениях [21], [34]).

Теорема 3.3. *Справедлива импликация*

$$\{I[q_+] \leqslant \alpha_n,\ I[q_-] \leqslant \beta_n\} \ \to\ \frac{d^n}{dt^n} + q(t) \in T_0[a, b],$$

где числа α_n, β_n $\ (n \geqslant 2, \beta_2 = \infty)$ определены равенствами

$$\alpha_{2m+1} = \beta_{2m+1} = (m-1)!m!,\ \alpha_{4m+2} = [(2m)!]^2,$$

$$\alpha_{4m} = (2m-2)!(2m)!,\ \beta_{4m+2} = (2m-1)!(2m+1)!,\ \beta_{4m} = [(2m-1)!]^2.$$

Следствие 3.2 и теорема 3.3 носят столь же точный характер, что и теорема 3.1. Огрубляя формулировку теоремы 3.3, получаем достаточное условие неосцилляции $\dfrac{d^n}{dt^n} + q(t)$ на $[a,b]$ в виде

$$\int\limits_a^b q_+(t)\,dt \leqslant \frac{4^{n-1}(n-1)\alpha_n}{(b-a)^{n-1}},\quad \int\limits_a^b q_-(t)\,dt \leqslant \frac{4^{n-1}(n-1)\beta_n}{(b-a)^{n-1}}$$

с неулучшаемыми константами в правых частях. (Для $n=2$ все эти факты, конечно, не новы.) Далее в данном параграфе обсуждаются модификации теоремы 3.3 и, в частности, объединение ее в более общей формулировке с признаком неосцилляции В. А. Кондратьева [35], накладывающим на q ограничение другого характера:

$$\xi_n(b-a)^{-n} < q(t) < \eta_n(b-a)^{-n}.$$

Если в заключительных параграфах первой и второй глав затрагиваются (в рамках приложений) количественные признаки неосцилляции для уравнений специального вида, то третья глава — «Неосцилляция решений уравнения $x^n + p_1 x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$» — имеет своей целью широкую качественную разработку вопросов неосцилляции для уравнения общего вида. Все рассмотрения этой главы относятся к вещественному случаю. В основу третьей главы положена статья [36].

§ 1 носит в основном обзорный характер. Здесь обсуждаются связи неосцилляции с разнообразными аспектами качественной теории линейного уравнения n-го порядка — с вопросами интерполяции и интерполяционными краевыми задачами, с дифференциальными неравенствами и теоремами о среднем, с теорией осцилляционных ядер Гантмахера—Крейна, с факторизацией Пойа—Маммана, со свойствами чебышевских и декартовых систем функций и т. п. Далее характеризуются найденные до последнего времени признаки и критерии неосцилляции. Вводится ряд применяемых в третьей главе обозначений и терминов, часть которых мы приведем и здесь.

L — оператор вида (47) с коэффициентами, вещественными и локально суммируемыми в основном интервале $I = (\alpha, \beta)$, где $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$. Расширенный промежуток $[\alpha, \beta]$ обозначается $\overline{I}$; если $\alpha = -\infty$ или $\beta = \infty$, он снабжается топологией расширенной числовой прямой. Конец β интервала I называется несингулярным, если $\beta < \infty$, причем все p_i суммируемы в $[s, \beta]$, $s \in I$ (и сингулярным в противном случае); называется неосцилляционным концом I, если $L \in T_0(s, \beta)$ для некоторого $s \in I$. Аналогичные определения относятся к концу α.

$\mathfrak{M}$ — n-мерное пространство решений уравнения $Lx = 0$, снабженное какой-либо нормой.

Запись «$u(t) \lll v(t)\ (t \uparrow \beta)$» означает, что $u(t), v(t)$ положительны вблизи β (т. е. в некотором интервале (s, β), $s \in I$) и $u = o(v)$ при $t \uparrow \beta$. Аналогичный смысл имеет соотношение $u \lll v$ при $t \downarrow \alpha$.

Вронскиан функций $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ обозначается через $[u_1, u_2, \dots, u_m](t)$. Вместо $[u_k, u_{k+1}, \dots, u_l]$ обычно пишем $[u; k \dots l \setminus m]$ $\big(= [u; k \dots l]$ при $m < k$ или $m > l\big)$.

Число нулей (с учетом кратности) функции $u(t)$ в промежутке J обозначается через $\varphi_u J$. В частности, $\varphi_u s$ есть кратность нуля $u(t)$ в точке $t = s \in I$. Кратности $\varphi_u \alpha$, $\varphi_u \beta$ понимаются в обобщенном смысле (см. ниже).

Система функций $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ называется (+)-декартовой в промежутке J, если для любого возрастающего набора индексов $(1 \leqslant) i_1 < i_2 < \cdots < i_k (\leqslant m)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k](t) > 0 \quad \text{в } J.$$

Такие системы образуют подкласс декартовых, т. е. удовлетворяющих известному правилу Декарта [37]: для любых (вещественных) c_i величина

$$\varphi_{c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m} J$$

не превосходит числа перемен знака в последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

В § 2 доказывается

Теорема 2.1. *Пусть $L \in T_0 I$. Тогда у уравнения $Lx = 0$ существуют фундаментальные системы решений $\{x_i\}$ такие, что*

$$x_1(t) \lll x_2(t) \lll \ldots \lll x_n(t) \quad (t \uparrow \beta); \tag{49}$$

в дальнейшем они именуются иерархическими фундаментальными системами (ИФС) при $t \uparrow \beta$. Каждая ИФС при $t \uparrow \beta$ обладает следующими свойствами:

а) $[x; 1 \ldots k](t) > 0$ в I, $k = 1, 2, \ldots, n$;

б) в некотором интервале (t_0, δ), $t_0 \in I$ система $x_1, \ldots, x_n$ является (+)-декартовой;

в) если $\{i_s\}$ и $\{j_s\}$ $(s = 1, \ldots, k;\ 1 \leqslant k \leqslant n-1)$ — два различных возрастающих набора индексов, причем $i_s \leqslant j_s$ $(s = 1, \ldots, k)$, то

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}](t) \lll [x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}](t) \quad (t \uparrow \beta).$$

Сходные факты справедливы и для ИФС при $t \downarrow \alpha$, характеризующимся соотношением $x_n \lll \ldots \lll x_1 \ \ (t \downarrow \alpha)$.

Из утверждения а) вытекает, между прочим, что факторизация Пойа—Маммана, т. е. представление L в виде:

$$L = h_n \frac{d}{dt} h_{n-1} \frac{d}{dt} \ldots h_1 \frac{d}{dt} h_0 \quad (t \in I)$$

(операции производятся справа налево, вещественные и достаточно гладкие $h_i(t) \neq 0$ в I), имеет место в том и только том случае, если $L \in T_0 I$. Г. Пойа [38] и Г. Маммана [39] установили это при дополнительном предположении о несингулярности одного из концов I.

В том же § 2 вводятся т. н. обобщенные нули. Пусть β — неосцилляционный конец I и $\{x_i\}$ — ИФС при $t \uparrow \beta$. Условимся каждому $x \in \mathfrak{M}$ приписывать в точке β нуль определенной кратности $(\geqslant 0)$ по следующему правилу:

$$\text{если} \quad x = \sum_{i=1}^{n-k} c_i x_i, \quad c_{n-k} \neq 0, \quad \text{то} \quad \varphi_x \beta = k \tag{50}$$

(при $x = 0$ полагаем $\varphi_x \beta = \infty$). Таким образом, $\varphi_x \beta$ определяется тем, какова скорость роста (или убывания) $x(t)$ при $t \uparrow \beta$ по сравнению со скоростью роста других решений; очевидно, $\varphi_x \beta$ зависит не только от $x(t)$, но и от оператора L. Аналогично определяется $\varphi_x\alpha$ в случае неосцилляционности левого конца I. Если соответствующий конец является несингулярным (или, более общо, если для него выполнены условия теоремы 1.1 из первой главы), обобщенная кратность совпадает с обычной. Обозначения T_0J, φ_xJ $(x \in \mathfrak{M})$, введенные выше для $J \subset I$, распространяются естественным образом на $J \subset \overline{I}$.

В § 3 исследуются различные аспекты распределения нулей решений уравнения $Lx = 0$, смыкающиеся с вопросами асимптотики благодаря введению обобщенных нулей. Последнее приводит, кроме того, к упрощению закономерностей распределения нулей, о чем свидетельствует

Теорема 3.1. *Пусть при* $k \to \infty$ $x_k \to x$ *в* $\mathfrak{M}$ $(x_k \in \mathfrak{M})$, $a_k \to a$, $b_k \to b$ $(\alpha \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant \beta)$. *Если каждая из точек* a, b *принадлежит* I *либо является неосцилляционным концом* I, *то*

$$\varphi_x[a, b] \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \varphi_{x_k}[a_k, b_k]. \tag{51}$$

Далее вводятся в рассмотрение сопряженные к t соответственно справа и слева точки $\overline{t}$, $\underline{t}$. Пусть $L \notin T_0\overline{I}$. Условимся считать, что $L \in T_0\alpha$ $(L \in T_0\beta)$ только в том случае, если α (β) — неосцилляционный конец I. Для любого $t \in \overline{I}$, при котором $L \notin T_0[t, \beta]$, положим

$$\overline{t} = \text{infinum } s \in [t, \beta] \text{ таких, что } L \notin T_0[t, s].$$

Аналогично, для любого $t \in \overline{I}$, при котором $L \notin T_0[\alpha, t]$, положим

$$\underline{t} = \text{supremum } s \in [\alpha, t] \text{ таких, что } L \notin T_0[s, t].$$

Если $t \in I$ и $\overline{t}$ $(\underline{t})$ определена, то, очевидно, $\overline{t} > t$ $(\underline{t} < t)$. Более существенные (хотя и достаточно прозрачные с интуитивной точки зрения) свойства $\overline{t}$, $\underline{t}$ как функций t описывает

Теорема 3.2. *Отображение* $t \to \overline{t}$ *есть возрастающий гомеоморфизм* $[\alpha, \underline{\beta}]$ *на* $[\overline{\alpha}, \beta]$, *обратный к которому дается отображением* $t \to \underline{t}$.

Рассматривается вопрос о том, как для заданного $t \in \overline{I}$ эффективно построить сопряженные точки (или выяснить, что они не определены), если известна фундаментальная система решений уравнения $Lx = 0$. Соответствующая процедура, хорошо известная (и весьма простая) в несингулярном случае, усложняется, когда один или оба конца I сингулярны. Тем не менее и в этом случае, как показано, существует алгоритм, состоящий из конечного числа операций.

В заключение § 3 обсуждается вопрос несколько иного характера. Пусть $L \notin T_0\overline{I}$, $\overline{\alpha} \neq \alpha$ (т. е. левый конец I является неосцилляционным). Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество $z \in \mathfrak{M}$, таких, что $z(t) \not\equiv 0$, $\varphi_z\overline{I} \geqslant n$, а через t_z^i — i-ый нуль $z(t)$ в I при нумерации в порядке возрастания с учетом кратности. Каждому $z \in \mathfrak{N}$ поставим в соответствие n-мерный вектор

$$N_z = (t_z^n, t_z^{n-1}, \ldots, t_z^1) \quad (\alpha \leqslant t_z^1 \leqslant \ldots \leqslant t_z^n \leqslant \beta).$$

Введем для векторов N_z лексикографическую упорядоченность и рассмотрим задачу минимизации N_z по всем $z \in \mathfrak{N}$.

Теорема 3.3. *Если, как предполагалось,* $L \notin T_0\overline{I}$, $\overline{\alpha} \neq \alpha$, *то решение* $z_0(t)$, *реализующее минимум* N_z *по* $z \in \mathfrak{N}$, *существует (и единственно с точностью до* *постоянного множителя), причем*

$$N_{z_0} = (\underbrace{\overline{\alpha}, \ldots, \overline{\alpha}}_{k}, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n-k}) \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1).$$

Подобное же утверждение относится к аналогичной максимизационной задаче. Соответствующие решения с «экстремальными нулями» являются в ряде вопросов наиболее удобными представителями решений, имеющих не менее n нулей на данном промежутке.

В § 4 устанавливается следующий критерий неосцилляции на отрезке, имеющем по крайней мере один несингулярный конец.

Теорема 4.1. *Пусть $[a, b) \subset I$. Для соотношения $L \in T_0[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{n-1}(t)$, удовлетворяющие на полуинтервале $[a, b)$ неравенствам*

$$[z; k \ldots n-1 \setminus l](t) > 0 \text{ при всех } k, l \quad (1 \leqslant k < l \leqslant n), \tag{52}$$

$$(-1)^{n-i} L z_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{53}$$

Предполагается, конечно, что $z_i^{(n-1)}$ абсолютно непрерывны. Концы a и b можно поменять ролями, заменив $[a, b)$ на $(a, b]$.

При $n = 2$ теорема 4.1 переходит (в случае несингулярности b) в известный критерий Валле-Пуссена [40]. В случае $n = 3$ теорема 4.1 имеет некоторое внешнее сходство с критерием неосцилляции для уравнений третьего порядка Н. В. Азбелева – В. А. Кондратьева – З. Б. Цалюка (см. [41, 42]), в формулировке которого, как и у нас при $n = 3$, фигурируют две пробные функции (а также отсутствующий в теореме 4.1 оператор L^*, сопряженный к L). Этот критерий относится к неосцилляции не на отрезке, а на полуинтервале.

Доказательство необходимости в теореме 4.1 родственно принадлежащему С. Н. Бернштейну [43, 44] построению т. н. базы чебышевской системы функций. Установлено, что при $L \in T_0[a, b]$ существует фундаментальная система решений уравнения $Lx = 0$, являющаяся (+)-декартовой в $[a, b] \cap I$. [1]

Конкретизация системы $\{z_i\}$ приводит к различным эффективным достаточным условиям неосцилляции. Если $b < \infty$, можно положить $z_k = (t-a)^k (b-t)^{n-k}$, $k = 1, \ldots, n-1$; при этом получаем улучшение (для вещественного линейного случая) признака неосцилляции Г. А. Бессмертных и автора [45]. Выбор в качестве z_k многочленов степени не выше $n-2$, удовлетворяющих условию (52), приводит к признакам неосцилляции, не содержащим никаких ограничений на коэффициент $p_1(t)$ (что, кстати, исключено для любого другого коэффициента).

В работах В. А. Кондратьева [35, 46], наряду с другими тонкими результатами, относящимися к двучленным уравнениям, установлен признак неосцилляции вида

$$\left\{ \frac{\mu_n}{t^n} \leqslant q(t) \leqslant \frac{\lambda_n}{t^n} \text{ при } \ 0 < t < \infty \right\} \ \to \ \frac{d^n}{dt^n} + q(t) \in T_0(0, \infty)$$

[1] Таким образом, часть, относящаяся к необходимости, выполняется, так сказать, с избытком; это относится как к числу функций в системе $\{z_i\}$, так и к условию (52), менее ограничительному, чем «(+)-декартовость».

с неулучшаемыми μ_n, λ_n (в частности, $\mu_3 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $\lambda_3 = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $\mu_4 = -\dfrac{9}{16}$, $\lambda_4 = 1$ и т. д.). При этом в [35, 46] существенно используется специфика двучленных уравнений. Теорема 4.1 позволяет обобщить данный результат на уравнения общего вида, для чего следует положить $z_k = t^{\nu_k}$ с надлежащим выбором ν_k. Например, при $n = 3$ получаем следующую пару неравенств, достаточную для неосцилляции на $(0, \infty)$:

$$\frac{2\sqrt{3}}{9t^3} - \frac{\sqrt{3} \mp 1}{3t^2} p_1(t) - \frac{\sqrt{3} \mp 1}{3t} p_2(t) \pm p_3(t) \geqslant 0 \quad (0 < t < \infty).$$

К числу наиболее простых и важных относится конкретизация $z_k = e^{\nu_k t}$ $(\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{n-1})$. Соответствующий результат можно выразить через корни $\lambda_i(t)$ «характеристического многочлена» оператора L

$$\lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}(t)\lambda + p_n(t). \tag{54}$$

Следствие 4.2. *Пусть при всех $t \in I$ корни $\lambda_i(t)$ многочлена* (54) *вещественны и разделены в том смысле, что*

$$\lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t) \quad (t \in I),$$

где ν_i $(\nu_1 < \dots < \nu_{n-1})$ — фиксированные постоянные. Тогда $L \in T_0 I$.

Полугрупповое свойство класса $T_0 I$ (либо выбор $z_k = (t - t_0)^{r_k} e^{\nu_k t}$) показывает, что следствие 4.2 остается в силе и при некоторых нестрогих неравенствах

$$\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1}.$$

В § 5 установленные ранее факты применяются для получения оценок решений уравнения $Lx = 0$.

Теорема 5.1. *Пусть достаточно гладкие вблизи β функции $z_0(t), z_1(t), \ldots, z_n(t)$ удовлетворяют условиям:*

$$z_0(t) \lll z_1(t) \lll \ldots \lll z_n(t) \quad (t \uparrow \beta),$$

$$[z; 1 \ldots k](t) \neq 0 \ \ \textit{вблизи } \beta, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$(-1)^{n-k} L z_k \geqslant 0 \ \ \textit{вблизи } \beta, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Тогда β является неосцилляционным концом I и для всякой ИФС $\{x_i\}$ при $t \uparrow \beta$ справедливы оценки

$$c_i z_{i-1}(t) \leqslant x_i(t) \leqslant d_i z_i(t) \ \ \textit{вблизи } \beta,$$

где c_i, d_i — некоторые положительные постоянные.

Следствие 5.3. *Пусть при всех достаточно больших t корни $\lambda_i(t)$ многочлена* (54) *вещественны и*

$$\nu_0 \leqslant \lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t) \leqslant \nu_n,$$

где ν_i — постоянные $(\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_n)$. Тогда для любой ИФС $\{x_i\}$ при $t \uparrow \beta$ справедливы оценки

$$c_i e^{\nu_{i-1} t} \leqslant x_i(t) \leqslant d_i e^{\nu_i t}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \ \ (t \geqslant t_0; c_i, d_i > 0).$$

Этот результат имеет сходство с т. н. «теоремами замораживания» (см. [34], [47]), но отличается от последних своим точным характером. С помощью модификации известной теоремы Эсклангона показано также, что в условиях следствия 5.3 при любом $i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$

$$x_i(k)(t) = O(e^{\nu_i t}), \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad (t \to \infty).$$

В основу третьей главы положена, как уже говорилось, подробная статья [36], результаты которой были получены автором в 1967 году. Видимо, в то же время сходное по направлению исследование предпринял Ф. Хартман, чьи результаты анонсированы в интересной (хотя и не свободной от погрешностей) публикации [48], несколько более ранней, чем [36]. В связи с этим третью главу заключает Дополнение, где сопоставляются общие моменты обеих работ. Констатируется, что соприкасающиеся с работой Ф. Хартмана формулировки статьи [36] являются в ряде отношений более содержательными[1]. По поводу формулировок Ф. Хартмана, относящихся к оценкам решений, в Дополнении приведены соответствующие контрпримеры.

Диссертацию завершает четвертая глава — «Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t) = 0$ в неколебательном случае». Здесь исследуются вопросы асимптотического поведения при $t \uparrow \beta$ решений уравнения

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t) = 0 \quad (\alpha \leqslant t < \beta \leqslant \infty) \tag{55}$$

с локально суммируемыми в $[\alpha, \beta)$ коэффициентами. Речь идет о вещественных коэффициентах, причем основное внимание уделяется случаю знакопостоянной $q(t)$. Существенную роль в четвертой главе играют специфические для $n = 2$ замены независимой переменной и функции, что делает эту главу, пожалуй, наиболее элементарной по характеру. В основу четвертой главы положена статья [49].

Пусть p, q вещественны и решения (55) не колеблются при $t \uparrow \beta$, т. е. каждое нетривиальное решение имеет в $[\alpha, \beta)$ конечное число нулей. Тогда существует ИФС при $t \uparrow \beta$, т. е. такая пара положительных вблизи β решений $x_1(t), x_2(t)$, что $x_1 = o(x_2)$ при $t \uparrow \beta$. (Этот частный случай $n = 2$ теоремы 2.1 третьей главы был хорошо известен и ранее.) Решение x_1 именуется обычно минимальным (при $t \uparrow \beta$); в отличие от x_2 оно определено однозначно с точностью до положительного множителя.

В § 1 формулируется и обсуждается предложение (теорема 1.1), дающее для случая знакопостоянной $q(t)$ полную классификацию возможных типов ИФС при $t \uparrow \beta$, учитывающую следующие свойства решений: стремление к нулю, к ненулевому пределу и бесконечности, монотонное возрастание или убывание вблизи β. Как выясняется, проблема различения всех имеющих здесь возможностей сводится к конечному числу квадратур над p, q (в отличие, кстати, от проверки самого факта неколебательности). Именно, определяющую роль играет сходимость и расходимость следующих интегралов:

$$\mathfrak{I}_1(p) = \int^{\beta} \exp\left(- \int^{t} p(\tau)\, d\tau \right) dt, \quad \mathfrak{I}_2(p, q) = \int^{\beta} q(t) \exp\left(\int^{t} p(\tau)\, d\tau \right) dt,$$

[1] Так, в [48] не рассматриваются обобщенные нули; формулировка, аналогичная нашей теореме 2.1, содержит соотношение (49) и утверждение а), но не б), в), и т. п.

$$\mathfrak{J}_3(p,q)=\int^{\beta} q(t)\int_t^{\beta}\exp\left(\int_s^t p(\tau)d\tau\right)ds\,dt,\quad \mathfrak{J}_4(p,q)=\int^{\beta} q(t)\int^{t}\exp\left(\int_s^t p(\tau)d\tau\right)ds\,dt.$$

Интеграл $\mathfrak{J}_3$ рассматривается лишь при $\mathfrak{J}_1<\infty$, а $\mathfrak{J}_4$ — лишь при $\mathfrak{J}_1=\infty$. Непроставленные пределы интегрирования выбираются в $[\alpha,\beta)$ произвольно, т.к. их выбор не влияет на сходимость.

Употребляемая ниже запись $x_2\uparrow\downarrow 1$ означает, что среди неминимальных решений есть и возрастающие, и убывающие к 1 (а следовательно, и к любой ненулевой постоянной). Соответственно, скажем, запись $x_2\uparrow 1$ означает, что любое неминимальное положительное решение возрастает к конечному пределу. Утверждение о монотонности относится к t, достаточно близким к β; монотонность строгая, если $q(t)\not\equiv 0$ вблизи β.

Теорема 1.1. *Неколебательное поведение при $t\uparrow\beta$ решений уравнения* (55) *со знакопостоянной $q(t)$ характеризуется следующей таблицей:*

$\mathfrak{J}_1$	$\lvert\mathfrak{J}_2\rvert$	$\lvert\mathfrak{J}_3\rvert$	$\lvert\mathfrak{J}_4\rvert$	$q(t)\geqslant 0$	$q(t)\leqslant 0$
$<\infty$	$<\infty$			$x_1\uparrow\downarrow 1,\quad x_2\downarrow 0$	
$<\infty$	∞	$<\infty$		$x_1\downarrow 1,\ \ x_2\downarrow 0$	$x_1\uparrow 1,\ \ x_2\downarrow 0$
$<\infty$		∞		* $x_1\downarrow 0,\ x_2\downarrow 0$	$x_1\uparrow\infty,\ x_2\downarrow 0$
∞			$<\infty$	$x_1\uparrow\infty,\ x_2\uparrow 1$	$x_1\uparrow\infty,\ x_2\downarrow 1$
∞			∞	* $x_1\uparrow\infty,\ x_2\uparrow\infty$	$x_1\uparrow\infty,\ x_2\downarrow 0$

Легко видеть, что таблица исчерпывает все возможности. В двух случаях, отмеченных звездочкой, неколебательность должна специально оговариваться, в остальных же случаях она заведомо имеет место (в частности, это очевидно при $q\leqslant 0$). Итак, при $q\geqslant 0$ имеем 5 различных типов неколебательного поведения решений, а при $q\leqslant 0$ — 4 таких типа; в целом же при знакопостоянной q имеется 8 различных типов неколебательного поведения решений. Различные случаи и подслучаи изучали ранее А. Винтнер [50], Э. Хилле [1], И. М. Соболь [51], З. Опяль [52] и др. В частности, И. М. Соболь дал полную классификацию типов для важного случая $p(t)$, $\beta=\infty$ (который покрывается двумя последними строками нашей таблицы); здесь имеется всего 3 типа, определяемых знаком q и сходимостью или расходимостью $\int^{\infty} tq(t)\,dt$. Общий случай, как видим, значительно богаче возможностями и не только в количественном, но и в качественном плане, поскольку при $\mathfrak{J}_1<\infty$ появляются случаи устойчивости и асимптотической устойчивости решений.

Утверждения, относящиеся к случаям, отмеченным звездочкой, естественно в приложениях сочетать с какими-либо признаками неколебательности. Такая схема, однако, не является обязательной, что иллюстрируется признаком устойчивости, приведенным в [53] (в несколько иной, но эквивалентной формулировке): все решения (55) при $t\to\infty$ стремятся к нулю вместе со своими производными, если

$$\mathfrak{J}_3(p,q)=\infty,\quad p(t)\geqslant \mathrm{const}\geqslant \xi\sqrt{q(t)}\quad (t\geqslant t_0), \tag{56}$$

где $\xi \approx 0.573$ — корень определенного трансцендентного уравнения. Здесь условия не предопределяют колебательности или неколебательности; неколебательный случай обслуживается первым из условий (56) (которое к тому же необходимо, как видно из таблицы), а колебательный — вторым. Последнее, разумеется, не необходимо, но носит точный характер (значение ξ не может быть не увеличено).

Полное доказательство теоремы 1.1 дано в § 2. Существенную роль в ее обосновании играют предложения о возмущении, которые удобно формулировать для уравнений в самосопряженной форме

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dy}{dt}\right] + h(t)y = 0 \quad (\alpha \leqslant t < \beta), \tag{57}$$

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dx}{dt}\right] + [h(t) + f(t)]x = 0 \quad (\alpha \leqslant t < \beta). \tag{58}$$

Здесь $r \geqslant 0,\ h$ вещественная, причем локально в $[\alpha, \beta)$ $1/r,\ f,\ h$ суммируемы и r абсолютно непрерывна. Пусть решения (57) не колеблются при $t \uparrow \beta$ и $y_1,\ y_2$ — ИФС при $t \uparrow \beta$. Положим

$$K(f) = \int^{\beta} y_1(t)y_2(t)|f(t)|dt \quad (\leqslant \infty).$$

Теоремы 2.1—2.2.

а) *Если $K[f] < \infty$ для комплекснозначной f, то уравнение* (58) *обладает фундаментальной системой $x_1,\ x_2$ такой, что*

$$\frac{x_1(t)}{y_1(t)} \to 1, \quad \frac{x_2(t)}{y_2(t)} \to 1 \quad (t \uparrow \beta);$$

б) *если $f \leqslant 0,\ K[f] = \infty$ и решения* (58) *не колеблются при $t \uparrow \beta$, то любая ИФС при $t \uparrow \beta$ $x_1,\ x_2$ такова, что*

$$\frac{x_1(t)}{y_1(t)} \uparrow \infty, \quad \frac{x_2(t)}{y_2(t)} \downarrow 0 \quad (t \uparrow \beta);$$

в) *если $f \leqslant 0,\ K[f] = \infty$, то любая ИФС при $t \uparrow \beta$ $x_1,\ x_2$ уравнения* (58) *такова, что*

$$\frac{x_1(t)}{y_1(t)} \downarrow 0, \quad \frac{x_2(t)}{y_2(t)} \uparrow \infty \quad (t \uparrow \beta).$$

В условиях а) имеют место также определенные асимптотические соотношения для производных. Отметим, что некоторые факты, родственные а), были известны ранее. В частности, для $r(t) \equiv 1,\ \beta = \infty$ утверждение а) доказал А. Халанай [2].

Согласно теореме 1.1 при $q \geqslant 0,\ \mathfrak{J}_1 < \infty,\ \mathfrak{J}_3 = \infty$ решения (58) (если они не колеблются) стремятся к нулю при $t \uparrow \beta$.

В заключение § 2 доказывается, что при $\beta = \infty$ также и первые производные решений стремятся к нулю при $t \to \infty$, если p ограничена сверху, либо p ограничена снизу, а q — сверху (тем самым, в частности, охватывается случай (56)). Полуограниченность здесь можно понимать в интегральном смысле.

Если одно из решений $x_1,\ x_2$ при $t \uparrow \beta$ стремится к I, то асимптотика второго определяется тривиальным образом. В тех (неколебательных) случаях, когда каждый из пределов совпадает с 0 или ∞, приходится, вообще говоря, довольствоваться лишь некоторыми асимптотическими оценками решений. Эффективные оценки такого рода установлены в начале § 3 (для вещественной знакопеременной q). С их помощью получаются эффективные достаточные условия колебательности, носящие интегральный характер.

Далее исследуется вопрос о том, как влияет на колебательность решений увеличение или уменьшение «коэффициента трения» $p(t)$. Ситуация здесь не столь простая, как при изменении «коэффициента упругости» $q(t)$, когда дело решает классическая теорема Штурма. Рассмотрим наряду с (55) еще одно уравнение

$$\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + q_1(t)x = 0 \quad (\alpha \leqslant t < \beta). \tag{59}$$

Теорема 3.2. *Пусть $q(t) \geqslant 0, q_1(t) \leqslant q(t)$ и решения уравнения* (55) *не колеблются при $t \uparrow \beta$. Для неколебательности при $t \uparrow \beta$ решений уравнения* (59) *достаточно выполнения любого из следующих условий:*

а) $\mathfrak{J}_1(p) < \infty$ *и* $p_1(t) \geqslant p(t)$*;*

б) $\mathfrak{J}_1(p) = \infty$ *и* $p_1(t) \leqslant p(t)$*;*

в) $\mathfrak{J}_1(p) < \infty, \mathfrak{J}_2(p,q) < \infty$ *и* $p_1(t)$ *сравнимо с* $p(t)$ *(т. е. либо $p_1 \geqslant p$, либо $p_1 \leqslant p$).*

В последнем случае неколебательность решений (55), согласно теореме 1.1, заведомо имеет место и потому может априори не оговариваться.

Следствие 3.2. *Пусть $p_1(t) \geqslant p(t),\ 0 \leqslant q_1(t) \leqslant q(t)$. Если решения* (55) *не колеблются и ограничены на $[\alpha, \beta)$, то это же верно и для решений* (59).

В качестве другого приложения теоремы 3.2 рассмотрим семейство уравнений с параметром

$$\ddot{x} + p(t,\lambda)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty;\ \alpha \leqslant t < \beta \leqslant \infty), \tag{60}$$

где $q(t) \geqslant 0$ и $p(t,\lambda)$ не убывает по λ. Пусть λ_0 есть *infimum* таких λ, для которых $\mathfrak{J}_1[p(t,\lambda)] < \infty$ (если таких λ нет, то полагаем $\lambda_0 = \infty$; если же все λ таковы, то $\lambda_0 = -\infty$). Обозначим через Λ множество λ, для которых решения (60) колеблются при $t \uparrow \beta$, а через $\overline{\Lambda}$ — замыкание Λ в топологии расширенной прямой.

Следствие 3.3. *Множество Λ связно. Если оно непусто, то $\lambda_0 \in \overline{\Lambda}$.*

Таким образом, для уравнения (60) можно «интерполировать осцилляцию» и «экстраполировать неосцилляцию». В частности, окрестность точки λ_0 (при $\lambda_0 = \pm\infty$ — полуокрестность) является, так сказать, местом наиболее вероятной колебательности: неколебательность при λ, близких к λ_0, влечет за собой неколебательность при всех $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Отметим, что неколебательности в самой точке $\lambda_0 \in (-\infty, \infty)$ недостаточно, как показывает пример: $p(t,\lambda) = 1 - 3e^{-\lambda t}$, $q(t) \equiv 1 \quad (0 \leqslant t < \infty)$.

В заключение § 3 показано, что уравнение (55) с вещественными ω-периодическими коэффициентами можно преобразовать в уравнение $y'' + r(s)y = 0$ с периодической $r(s)$, не накладывая (в отличие от известного способа) никаких требований гладкости на $p(t)$. Именно, следует положить (p_{cp} — среднее значение $p(t)$)

$$s = s(t) = \int\limits_0^t \exp\left(p_{cp}u - \int\limits_0^u p(\tau)\,d\tau\right)du; \quad y = x\exp\left(\frac{1}{2}p_{cp}t\right), \quad t = t(s).$$

Таково содержание работы. Несколько слов о планировке материала, вызвавшей определенные затруднения ввиду взаимопересечения различных тем. Избранный вариант, быть может не являющийся оптимальным, характеризуется полной независимостью глав, которые, таким образом, можно читать в любом порядке. Соответственно принята автономная нумерация формул и предложений в каждой главе. При таком изложении оказались необходимыми отдельные повторения (по поводу терминологии, обозначений и т. п.). К издержкам планировки относится и некоторая «разношерстность» первой главы. В целом при распределении материала по главам на первый план выдвигался не формально-тематический признак, а подход, на котором базируется доказательство. Например, предложения, относящиеся к разряду признаков неосцилляции, как уже говорилось, можно встретить во всех главах, причем применяемые средства всякий раз характерны для данной главы. В первой главе это экстремальные свойства обобщенных уравнений, во второй — аппарат теории обобщенных уравнений (в частности, формула следов), в третьей — «вронскианная» техника, обобщенные нули и дифференциальные неравенства, в четвертой — специальные элементарно-аналитические преобразования. Ни один из этих подходов сам по себе не позволил бы охватить все рассмотренные задачи.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [21, 36, 49, 54–56]. Часть этих результатов сообщалась на IV Всесоюзном математическом съезде и Московском конгрессе математиков.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность своему учителю М. А. Красносельскому. Автор признателен также всем участникам семинара по обыкновенным дифференциальным уравнениям при ВГУ, которые приняли участие в обсуждении затронутой проблематики.

1. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Разрешимость задачи Коши

1.1. Классическому вопросу о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения с заданными начальными условиями посвящена весьма обширная литература, где изучался, в основном, нелинейный случай. Ниже этот вопрос исследуется для линейного уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x + p_{n+1}(t) = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{1.1}$$

где $-\infty < a < b < \infty$. Комплекснозначные функции $p_i(t)$, $i = 1, \ldots, n+1$ предполагаются локально суммируемыми в полуинтервале $(a, b]$, но могут иметь несуммируемые особенности в точке $t = a$. Под решением уравнения (1.1), естественно, понимается функция $x(t) \in C^{n-1}[a, b]$ такая, что:

1) $x^{(n-1)}(t)$ абсолютно непрерывна в каждом отрезке $[a_1, b]$ при $a_1 \in (a, b)$;

2) равенство (1.1) имеет место почти при всех t из $[a, b]$.

Выясним, каковы должны быть $p_i(t)$, чтобы для уравнения (1.1) была разрешима любая задача Коши в точке $t = a$, т. е. чтобы при любых числах $c_1, c_2, \ldots, c_n$ существовало решение (1.1) такое, что

$$x^{(i-1)}(a) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема 1.1. *Для того чтобы задача Коши* (1.1)—(1.2) *имела решение при любых* $c_1, c_2, \ldots, c_n$*, необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы*

$$\int\limits_a p_1(t)\,dt, \quad \int\limits_a \Big(\exp\int\limits^t p_1(s)\,ds\Big)p_i(t)\,dt, \quad i = 2, 3, \ldots, n+1. \tag{1.3}$$

Это же условие эквивалентно единственности решения задачи (1.1)—(1.2) при любых $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Конечно, имеется в виду неабсолютная сходимость интегралов. Непроставленные пределы интегрирования могут быть выбраны в $(a, b]$ произвольно, так как не влияют на сходимость. От других результатов на эту тему сформулированная теорема отличается своей окончательностью. В нелинейном случае подобный эффективный критерий, по-видимому, не может быть указан даже для уравнения $\dot{x} = f(t, x)$, где x — скаляр. Как будет видно, помимо линейности, существенную роль играет также то обстоятельство, что мы имеем дело именно с уравнением n-го порядка (а не с линейной системой общего вида).

1.2. Переходим к доказательству, которое основано на сочетании нескольких простых соображений.

Заметим прежде всего, что в силу линейности уравнения (1.1) утверждения «при любых c_i задача (1.1)—(1.2) имеет не менее одного решения» и «при любых c_i задача (1.1)—(1.2) имеет не более одного решения» эквивалентны. Поэтому будем говорить лишь о разрешимости задачи Коши, имея в виду, что эта разрешимость автоматически является однозначной.

Избавимся от неоднородности в уравнении (1.1) с помощью следующего приема. Введем фиктивную переменную y_0 и рассмотрим систему из $n+1$ уравнений

$$\begin{aligned}&\dot y_0 = 0,\\ &\dot y_i = y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,\\ &\dot y_n = -p_{n+1}y_0 - p_n y_1 - \cdots - p_1 y_n,\end{aligned} \tag{1.4}$$

для решения которой также задаются начальные условия при $t = a$:

$$y_i(a) = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Разрешимость задачи (1.1)—(1.2) при любых c_i эквивалентна разрешимости задачи (1.4)—(1.5) при любых c_i. В самом деле, ввиду очевидной связи между уравнениями (1.1) и системой (1.4) мы должны лишь убедиться, что задача (1.4)—(1.5) разрешима при любых $c_0, c_1, \ldots, c_n$, если она разрешима при $c_0 = 1$ и любых $c_1, \ldots, c_n$. Если обозначить решение задачи (1.4)—(1.5) через $y(t; c_0, c_1, \ldots, c_n)$, то сказанное непосредственно вытекает из очевидных соотношений

$$\begin{aligned}&y(t; c_0, c_1, \ldots, c_n) = y(t; 1, \frac{c_1}{c_0}, \ldots, \frac{c_n}{c_0}) \quad \text{при} \quad c_0 \neq 0,\\ &y(t; 0, c_1, \ldots, c_n) = y(t; 1, c_1, \ldots, c_n) - y(t; 1, 0, \ldots, 0).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Итак, от неоднородности мы избавились. Следующий шаг состоит в переходе к матричному уравнению:

$$\dot Y = P(t)Y \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{1.7}$$

где через $P(t)$ обозначена матрица коэффициентов системы (1.4):

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & & 0 & 1\\ -p_{n+1} & -p_n & \ldots & \ldots & -p_1 \end{pmatrix}$$

По аналогии с предыдущим матрица $n+1$-го порядка $Y(t)$ в (1.7) предполагается непрерывной в точке $t = a$ и абсолютно непрерывной в $(a, b]$ (т. е. в любом отрезке вида $[a_1, b]$, $a < a_1 < b$).

Разрешимость задачи (1.4)—(1.5), очевидно, эквивалентна существованию у (1.7) решения, удовлетворяющего условию

$$Y(a) = I. \tag{1.8}$$

Таким образом, установлена

Лемма 1.1. *Задача* (1.1)—(1.2) *разрешима при любых* $c_1, \ldots, c_n$ *в том и только том случае, если разрешима задача* (1.7)—(1.8).

Рассмотрим теперь пару задач для матриц одного порядка

$$\dot{U} = A(t)U, \quad U(a) = I, \tag{1.9}$$

$$\dot{Y} = [A(t) + B(t)]Y, \quad Y(a) = I. \tag{1.10}$$

Лемма 1.2. *Если $B(t)$ суммируема в $[a, b]$, то задачи* (1.9) *и* (1.10) *разрешимы или неразрешимы одновременно.*

Из соображений симметрии достаточно показать, что существование решения $U(t)$ задачи (1.9) влечет за собой существование решения $Y(t)$ задачи (1.10). Положим

$$Y(t) = U(t)W(t), \tag{1.11}$$

тогда

$$\dot{Y} = AUW + U\dot{W} = (A + B)UW.$$

Отсюда

$$\dot{W} = C(t)W, \tag{1.12}$$

где $C(t) = U^{-1}(t)B(t)U(t)$. Так как $U(t)$, $U^{-1}(t)$ непрерывны в $[a, b]$, то из суммируемости $B(t)$ в $[a, b]$ вытекает суммируемость $C(t)$ в $[a, b]$. Уравнение (1.11) для W является поэтому несингулярным и, следовательно, обладает решением, удовлетворяющим условию $W(a) = I$. Как известно, $W(t)$ может быть представлено сходящимся рядом

$$W(t) = I + \int_a^t C(t_1)\,dt_1 + \int_a^t C(t_1)\,dt_1 \int_a^{t_1} C(t_2)\,dt_2 + \ldots \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1.13}$$

Требуемое решение задачи (1.10) дается формулой (1.11). Лемма 1.2 доказана.

Возвращаясь к уравнению (1.7), представим матрицу $P(t)$ в виде $P(t) = A(t) + B$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ -p_{n+1} & \ldots & -p_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Так как $B(t)$ суммируема на $[a, b]$, то, согласно лемме 1.2, разрешимость задачи (1.7)—(1.8) эквивалентна разрешимости задачи (1.9). Смысл всех этих переходов заключается в том, что мы пришли к уравнению $\dot{U} = AU$, которое интегрируется в квадратурах. Решая его, находим, что матрица $U(t) = \|u_{ij}(t)\|_1^{n+1}$, удовлетворяющая условию $U(a) = I$, если она существует, должна иметь следующий вид: все ее строки, кроме последней, совпадают с соответствующими строками единичной матрицы (порядка $n + 1$), а элементы $(n + 1)$-й строки определяются равенствами:

$$u_{n+1,j}(t) = -\int_a^t \exp\Big(\int_t^s p_1(\tau)\,d\tau\Big) p_{n+2-j}(s)\,ds, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.15}$$

$$u_{n+1,n+1}(t) = \exp\Big(-\int_a^t p_1(\tau)\,d\tau\Big). \tag{1.16}$$

Эти функции определены и удовлетворяют необходимому соотношению $u_{n+1,j}(a)= = \delta_{n+1,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, если интегралы (1.3) сходятся.

Обратная зависимость также имеет место, в чем проще всего убедиться, начиная с $u_{n+1,n+1}(t)$. Теорема доказана.

1.3. Сделаем несколько замечаний по поводу доказанного предложения.

Отметим, во-первых, что, наряду с самим фактом существования решения задачи Коши, получена также возможность приближенного нахождения этого решения с помощью ряда (1.13). При этом существенно, что в нашем случае $B(t)$, а следовательно, и $C(t)$, не только суммируемы, но и непрерывны. Отсюда следует, что если ограничиться k первыми членами ряда (1.13), то при $t \to 0$ погрешность имеет порядок $O(t^k)$; это относится, конечно, не только к (1.13), но и к (1.11), поскольку $U(t)$ непрерывна. Подчеркнем, что сами интегралы (1.3) могут сходиться сколь угодно медленно; все «неприятности», связанные с плохим поведением $p_i(t)$, как бы впитывает в себя матрица $U(t)$.

Естественным является вопрос о том, насколько существенно, что в уравнении (1.1) x — скаляр. Последнее обстоятельство по существу использовалось лишь в самом конце доказательства, при решении матричного уравнения $\dot{U} = AU$; именно, мы записали решение уравнения

$$\dot{u}_{n+1,n+1} = -p_1(t)u_{n+1,n+1}$$

в виде (1.16). Если $p_1, u_{n+1,n+1}$, в свою очередь, являются матрицами порядка выше первого, то такая запись законна, например, при $p_1 = \text{const}$. В частности, при $p_1(t) \equiv 0$, когда условия (1.3) приобретают особенно простой вид и сводятся к сходимости интегралов

$$\int\limits_a p_i(t)\,dt, \quad i = 2, 3, \ldots, n+1,$$

теорема 1.1 сохраняет силу для матричного (или векторного) уравнения любой размерности. Можно также считать $x(t)$ и $p_i(t)$ функциями скалярного аргумента со значениями в некоторой банаховой алгебре с единицей; интегрирование при этом понимается по Бохнеру. При таких обобщениях следует несколько видоизменить соотношения (1.6), основываясь на том факте, что всякий элемент C_0 алгебры может быть представлен как разность двух обратимых элементов.

Другое возможное обобщение теоремы 1.1 заключается в том, что переменная t может пробегать многообразия, отличные от отрезка вещественной прямой. В частности, t может меняться в ограниченной односвязной области D комплексной плоскости, если $p_1(t), \ldots, p_{n+1}(t)$ аналитичны в D (тем самым обеспечена однозначность первообразных от p_i). Относительно лежащей на границе области D точки $t = a$ предполагается, что она может быть соединена с какой-либо (а следовательно, и с любой) точкой D спрямляемой кривой, целиком лежащей в D. Под решением задачи (1.1)—(1.2) понимается функция $x(t)$, аналитическая и удовлетворяющая уравнению (1.1) при $t \in D$ и такая, что

$$x^{(i-1)}(t) \to c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{при} \quad t \to a, \quad t \in D.$$

Теорема 1.1 дает характеристику особенностей $p_i(t)$ в точке $t = a$, которые не влияют на разрешимость задачи Коши.

Проиллюстрируем это на примере. Пусть $a = 0$ и область состоит из таких $t = u + iv \in D$, что

$$0 < u < 1, \quad |v| < u^k,$$

где k — некоторое число. Рассмотрим уравнение

$$x^{(n)} + t^m (\ln t)^r \sin \frac{1}{t}\, x = 0 \quad (t \in D);$$

для определенности пусть имеется в виду главное значение $\ln t$; m, r — некоторые целые числа. Используя теорему 1.1 и несложные выкладки, получаем, что для разрешимости задачи Коши с любыми начальными данными при $t = 0$ необходимо и достаточно следующее (не зависящее от n) условие:

$$k \geqslant 2 \quad \text{и либо} \quad m > -2, \quad \text{либо} \quad m = 2, \quad r < 0.$$

Следует подчеркнуть, что конечность точки $t = a$ является в теореме 1.1 весьма важным условием, которое не может быть отброшено. Оно не имело, правда, значения для лемм 1.1 и 1.2 (если понимать решение задачи Коши асимптотически), но существенно использовалось, когда понадобилась суммируемость постоянной матрицы B.

1.4. Несмотря на последнее замечание, теорема 1.1 имеет довольно любопытные приложения к изучению асимптотики решений при $t \to \infty$. Продемонстрируем одно из таких приложений, причем ограничимся уравнением

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \quad (t_0 \leqslant t < \infty). \tag{1.17}$$

Известно следующее предложение.

Теорема 1.2 (Э. Хилле [1], см. также А. Халанай [2]). *Для того чтобы уравнение* (1.17) *обладало системой решений вида*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t + o(1), & \dot{x}_1(t) &= 1 + o\Big(\frac{1}{t}\Big), \\ x_2(t) &= 1 + o\Big(\frac{1}{t}\Big), & \dot{x}_2(t) &= o\Big(\frac{1}{t^2}\Big), \end{aligned} \quad (t \to \infty), \tag{1.18}$$

достаточно, а в случае знакопостоянной $q(t)$ *и необходимо, чтобы*

$$\int^{\infty} t^2 |q(t)|\, dt < \infty.$$

Из теоремы 1.1 вытекает, что при любой — знакопеременной, комплекснозначной или даже абстрактной $q(t)$ — имеет место

Следствие 1.1. *Уравнение* (1.17) *обладает системой решений вида* (1.18) *в том и только том случае, если*

$$\int^{\infty} t^2 q(t)\, dt \tag{1.19}$$

сходится.

Очевидно, это обобщает результат Хилле и притом существенно, поскольку методика работ [1], [2] не приспособлена для условно сходящихся интегралов.

Докажем следствие 1.1. Произведем замену переменной и функции, положив

$$s = \frac{1}{t}, \quad y(s) = sx\Big(\frac{1}{s}\Big).$$

Тогда, как нетрудно подсчитать, уравнение (1.17) примет вид

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{s^4}q\Big(\frac{1}{s}\Big)y = 0 \quad (0 < s \leqslant s_0). \tag{1.20}$$

Применяя теорему 1.1, заключаем, что в том и только том случае, если сходится интеграл

$$\int\limits_0 \frac{1}{s^4}q\Big(\frac{1}{s}\Big)\, ds, \tag{1.21}$$

уравнение (1.20) обладает системой решений вида

$$\begin{aligned} &y_1(s) = 1 + o(s), \quad \frac{dy_1}{ds} = o(1), \\ &y_2(s) = s + o(s), \quad \frac{dy_2}{ds} = 1 + o(1), \end{aligned} \qquad (s \downarrow 0). \tag{1.22}$$

Возвращаясь к переменной t, видим, что сходимость интеграла (1.21) есть не что иное, как (1.19). Далее, из (1.22) находим

$$x_1(t) = \frac{y_1(s)}{s} = \frac{1}{s} + o(1) = t + o(1),$$
$$\dot{x}_1(t) = -s^2\frac{d}{ds}\left(\frac{y_1}{s}\right) = y_1 - s\frac{dy_1}{ds} = 1 + o\Big(\frac{1}{t}\Big).$$

Для $x_2(t)$ таким путем, правда, получаются менее точные, чем (1.18) соотношения: $x_2 = 1 + o(1)$, $\dot{x}_2 = o\,(1/t)$. Необходимость (1.19), таким образом, доказана.

Что касается уточнения оценок для x_2, $\dot{x}_2$, то в скалярном случае проще всего воспользоваться формулой

$$x_2(t) = x_1(t)\int\limits_t^\infty \frac{d\tau}{x_1^2(\tau)}$$

и полученными уже соотношениями для x_1, $\dot{x}_1$. Это завершает доказательство для скалярного случая. Однако если нас интересует распространение результата на тот случай, когда в (1.17) x и q — матрицы или, более общо, элементы банаховой алгебры[1], то следует прибегнуть к разложению (1.13), где роль t сейчас выполняет переменная s. Ввиду однородности уравнения (1.17) можно во всех матрицах для простоты опустить строку и столбец, отвечающие y_0 (в однородном случае эти строка и столбец состоят из одних нулей), и иметь дело, как обычно, с матрицами, порядок которых равен порядку уравнения.

В нашем случае находим последовательно ($s \downarrow 0$):

$$U(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\int\limits_0^s \frac{1}{\tau^4}q\left(\frac{1}{\tau}\right)\, d\tau & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ o(1) & 1 \end{pmatrix},$$

[1]При этом правые части в (1.18) и подобных соотношениях понимаются, конечно, как коэффициенты при единице алгебры.

$$C(s)=U^{-1}(s)BU(s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ o(1) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ o(1) & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} o(1) & 1 \\ o(1) & o(1) \end{pmatrix},$$

$$\int\limits_0^s C(\tau)\,d\tau=\begin{pmatrix} o(s) & s \\ o(s) & o(s) \end{pmatrix},\quad C(s)\int\limits_0^s C(\tau)\,d\tau=o(s),$$

$$W(s)=\begin{pmatrix} 1+o(s) & s+o(s^2) \\ o(s) & 1+o(s) \end{pmatrix},\ Y(s)=U(s)W(s)=\begin{pmatrix} 1+o(s) & s+o(s^2) \\ o(s) & 1+o(s) \end{pmatrix}.$$

Итак, соотношения (1.22) для y_2 уточняются следующим образом:

$$y_2(s)=s+o(s^2),\quad \frac{dy_2}{ds}=1+o(s)\quad (s\downarrow 0).$$

Возвращаясь от s, y_2 к t, x_2 получаем требуемые соотношения.

Из доказательства ясно, что результат аналогичного характера может быть тем же способом получен для уравнения любого порядка и общего вида (в матричном или абстрактном случае — без члена с $x^{(n-1)}$). Так как это связано с довольно громоздкими выкладками, то мы здесь не будем этим заниматься.

§ 2. Непрерывная зависимость решений от параметра

2.1. Настоящий параграф посвящен вопросу о непрерывной зависимости от параметра решений линейной системы уравнений. Вопросы предельного перехода исследовали многие авторы, в том числе И. И. Гихман [3], Б. П. Демидович [57], М. А. Красносельский и С. Г. Крейн [4], Я. Курцвейль [10, 58], Я. Курцвейль и З. Ворел [5], Г. Антосевич [6], В. Рейд [7], Р. В. Гамкрелидзе и Г. Л. Харатишвили [59]. Большинство этих работ связано с обоснованием принципа усреднения Боголюбова—Крылова (см., например, [60]) в нелинейной механике и характеризуется общей точкой зрения на линейный и нелинейный случаи.

Ниже получаются только линейные уравнения, причем основной упор будет сделан на случай конечного промежутка. Вопрос, подлежащий изучению, состоит в следующем. Рассмотрим уравнения

$$\dot{X}_k=A_k(t)X_k+F_k(t),\ X_k(a)=C,\ k=0,1,\dots\ (a\leqslant t\leqslant b). \tag{2.1}$$

Здесь X_k, A_k, F_k, C — матрицы m-го порядка, причем $A_k(t)$, $F_k(t)$ суммируемы на конечном промежутке $[a,b]$ (возможны и менее ограничительные предположения, которые будут обсуждаться позднее). Каковы условия, обеспечивающие равномерную на $[a,b]$ сходимость $X_k(t)$ к $X_0(t)$ при любой C?

Данный вопрос о «равномерной сходимости» уравнений (2.1) является весьма естественным. К нему можно подойти и несколько иначе, если в дифференциальных уравнениях (2.1) считать X_k, F_k, C не матрицами, а векторами размерности m. В каком случае вектор-решения $X_k(t)$ равномерно на $[a,b]$ сходятся к $X_0(t)$ при любом начальном векторе C?

Легко видеть, что оба вопроса эквивалентны. Мы в дальнейшем придерживаемся матричной интерпретации, которая значительно более удобна с аналитической точки зрения.

Ответим сразу, что эффективный ответ на сформулированный вопрос в полном объеме нам неизвестен. Ниже будет установлен ряд фактов в этом направлении, которые, в частности, позволят полностью решить данный вопрос для систем, соответствующих скалярным уравнениям n-го порядка.

Характер параметризации семейства уравнений, разумеется, не имеет значения. Можно было бы, например (как это обычно делается), считать параметр непрерывным и устремлять его к нулю. Дискретный вариант, как нам кажется, яснее подчеркивает отсутствие априорных предположений о непрерывности $A_k(t)$, $F_k(t)$ по параметру k.

Некоторые из излагаемых ниже результатов приводились в краткой и менее общей форме в [56, 61].

2.2. Ниже используются следующие обозначения:

$\|\cdot\|$ — некоторая «операторная» норма для матриц, т. е. такая, что $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$, $\|I\| = 1$;

$L[a, b]$ — пространство суммируемых на $[a, b]$ матриц-функций (порядок которых в каждом случае будет ясен из контекста; иногда будет идти речь о скалярных функциях) с естественной нормой;

$$C^V(t) = \int\limits_a^t C(s)\, ds;$$

V_a^b — вариация на $[a, b]$;

знак “$\Rightarrow$” означает сходимость, равномерную на $[a, b]$.

Итак, нас интересуют условия, при которых для решений уравнений (2.1) имеет место соотношение

$$X_k(t) \Rightarrow X_0(t) \quad (k \to \infty) \quad \text{при любом } C. \tag{2.2}$$

Простейшее условие такого рода доставляет сходимость в $L[a, b]$:

$$\int\limits_a^b \|A_k(t) - A_0(t)\|\, dt \to 0, \quad \int\limits_a^b \|F_k(t) - F_0(t)\|\, dt \to 0, \quad (k \to \infty),$$

во многих отношениях, однако, оно является слишком грубым. Результаты работ [4, 5] дают для интересующего нас линейного случая требование, которое часто оказывается менее ограничительным:

$$A_k^V(t) \Rightarrow A_0^V(t),\ F_k^V(t) \Rightarrow F_0^V(t) \quad (k \to \infty) \tag{2.3}$$

$$\|A_k(t)\| \leqslant h(t) \in L[a, b] \quad (a \leqslant t \leqslant b), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Усовершенствование доказательств позволяет ослабить последнее неравенство до

$$\int\limits_a^b \|A_k(t)\|\, dt \leqslant C < \infty \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Как будет видно из дальнейшего, при выполнении (2.4) соотношения (2.3) не только достаточны, но и необходимы для (2.2), так что в случае (2.4) вопрос можно считать исчерпанным. По этому поводу коснемся работы [7], где также изучаются условия, при которых имеет место (2.2) (для классических и обобщенных дифференциальных уравнений). Основным среди требований, накладываемых в [7] для классического случая, является слабая сходимость в $L[a,b]$ $A_k(t)$ к $A_0(t)$ и $F_k(t)$ к $F_0(t)$. Поскольку это требование влечет за собой выполнение (2.3) и (2.4), вместе взятых, то данные результаты В. Рейда не представляются существенно новыми. На эту оценку не влияет то обстоятельство, что вместо условий $X_k(a) = C$ в [7] фигурируют условия $X_k(a_k) = c_k$, где $a_k \to a_0$, $c_k \to c_0$ $(k \to \infty)$. Мы в дальнейшем пренебрегаем возможностью подобных обобщений, носящих по существу фиктивный характер.

Если отказаться от ограничения (2.4), проблема существенно усложняется. Хотя в некоторых случаях, например для однородного уравнения первого порядка, соотношение (2.4) заведомо излишне, в целом это не так, поскольку условие (2.3) само по себе ни необходимо, ни достаточно для (2.2).

Чтобы пояснить последнее замечание, воспользуемся примером, заимствованным из работы Я. Курцвейля [10]. Рассмотрим на промежутке $[a,b]$ последовательность скалярных уравнений

$$\dot{x}_k = p_k(t)x_k + f_k(t), \text{ где } p_k(t) = k^{1-\alpha}\cos kt, \ f_k(t) = k^{1-\beta}\sin kt \tag{2.5}$$

$(k = 1, 2, \dots)$, которую будем сравнивать с уравнением $\dot{x} = 0$. Пусть $x_k(t, c_0)$ — решение уравнения (2.5), удовлетворяющее условию $x_k(a) = c_0$. Как показывает непосредственный подсчет, соотношение

$$x_k(t, c_0) \rightrightarrows c_0 \quad (k \to \infty) \quad \text{при любом } c_0 \tag{2.6}$$

имеет место в том и только том случае, если

$$\alpha > 0, \ \beta > 0, \ \alpha + \beta > 1. \tag{2.7}$$

Для данного конкретного примера требование сходимости в $L[a,b]$ коэффициентов и правых частей сводится к неравенствам $\alpha > 1$, $\beta > 1$, а условие (2.3) — к неравенствам $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Отсюда видно, что соотношения (2.3) не являются достаточными для сходимости решений. В то же время они не являются и необходимыми. Чтобы удостовериться в этом, положим $\alpha = \beta = 0,5$. Тогда, как нетрудно подсчитать,

$$x_k(t, c) = c - 0,5(t-a) + o(k^{-0,5}) \quad (k \to \infty),$$

т. е. при любом c $x_k(t,c)$ равномерно сходятся к соответствующему решению уравнения $\dot{x} = -0.5$, хотя соотношение $f_k^V(t) \rightrightarrows -0,5t$ не имеет места.

Пример (2.5), согласно Я. Курцвейлю, послужил отправной точкой для работ [10, 58], результаты которых, в частности, дают — с общих позиций, разумеется, — достаточное для (2.6) условие в виде $\alpha > 0,5$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 1$. Как отмечалось в [10], пример, таким образом, объяснен не полностью, ввиду требования $\alpha > 0,5$ вместо $\alpha > 0$ (заметим также, что вопрос о необходимости тех или иных условий в [10] не затрагивается). Мы не останавливаемся здесь на работах [10, 58] подробнее. Они имеют довольно мало общего с дальнейшими рассмотрениями данного параграфа. Мы пользуемся в дальнейшем специфически линейными средствами, что позволит нам получить для линейного случая более тонкие результаты[1].

[1]В частности, будет полностью объяснен — хотя и с менее общих «линейных» позиций — приведенный выше пример Я. Курцвейля.

2.3. Переходим к существу дела. Прежде всего, как и в § 1, избавимся от неоднородности за счет повышения размерности. Именно, вместо уравнений (2.1) рассмотрим уравнения для матриц порядка $2m$

$$\dot{U}_k = B_k(t)U_k, \quad U_k(a) = I_{2m}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{2.8}$$

Здесь через I_{2m} обозначена (во избежание путаницы) единичная матрица порядка $2m$, а B_k имеют в блочной записи вид

$$B_k(t) = \begin{pmatrix} A_k(t) & F_k(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{2.9}$$

Лемма 2.1. *Для того чтобы при любом C решения уравнений* (2.1) *удовлетворяли условию* (2.2)*, необходимо и достаточно, чтобы для решений уравнений* (2.8) *имело место соотношение*

$$U_k(t) \rightrightarrows U_0(t) \quad (k \to \infty).$$

Это непосредственно вытекает из формул, связывающих решения уравнений (2.1) и (2.8). Пусть решение задачи (2.8) имеет вид

$$U_k(t) = \begin{pmatrix} U_k^{11}(t) & U_k^{12}(t) \\ U_k^{21}(t) & U_k^{22}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots$$

где все блоки порядка m. Из (2.9) вытекает, что $U_k^{21}(t) \equiv 0$, $U_k^{22}(t) \equiv I$. Легко видеть, что решение (2.1) имеет вид

$$X_k(t) = U_k^{11}(t)C + U_k^{12}(t) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Наоборот, решение задачи (2.8) выражается через решение $X_k(t) = X_k(t, C)$ уравнения (2.1) формулой

$$U_k(t) = \begin{pmatrix} X_k(t, I) - X_k(t, 0) & X_k(t, 0) \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Если уравнения (2.1) являются векторными, то нет надобности повышать порядок до $2m$, можно, очевидно, ввести вопрос к однородной задаче для матриц порядка $m + 1$.

Итак, без потери общности вместо (2.1) можно изучать однородные задачи

$$\dot{X}_k = A_k(t)X_k, \; X_k(a) = I, \quad k = 0, 1, \dots \; (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.10}$$

которые и будут в дальнейшем основным объектом исследования. Нас интересуют условия, при которых

$$X_k(t) \rightrightarrows X_0(t) \quad (k \to \infty). \tag{2.11}$$

2.4. Рассмотрим наряду с (2.10) уравнения

$$\dot{U}_k = [A_k(t) + B_k(t)]U_k, \; U_k(a) = I, \quad k = 0, 1, \dots \; (a \leqslant t \leqslant b). \tag{2.12}$$

На последовательность $\{B_k(t)\}$ наложим следующие ограничения:

$$\int_a^b \|B_k(t)\|\,dt \leqslant c < \infty \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{2.13}$$

$$B_k^V(t) \rightrightarrows B_0^V(t) \quad k \to \infty. \tag{2.14}$$

Теорема 2.1. *В предположениях* (2.13), (2.14) *соотношение*

$$U_k(t) \rightrightarrows U_0(t) \quad (k \to \infty). \tag{2.15}$$

эквивалентно соотношению (2.11).

Для доказательства нам понадобится несколько простых вспомогательных фактов.

Лемма 2.2. *Если* $F(t)$ *абсолютно непрерывна на* $[a, b]$ *и*

$$\|\dot{F}(t)\| \leqslant c(t)\|F(t)\|$$

почти всюду на $[a, b]$, *то*

$$\|F(t) - F(a)\| \leqslant \|F(a)\|\Big(\exp\int_a^t c(s)\,ds - 1\Big) \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

В самом деле,

$$\|F(t)\| \leqslant w(t) \overset{Df}{=} \|F(a)\| + \|F(t) - F(a)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|F(a)\| + \int_a^t c(s)\|F(s)\|\,ds \leqslant \|F(a)\| + \int_a^t c(s)w(s)\,ds.$$

Оценивая $w(t)$ по Гронуоллу—Беллману, находим

$$w(t) \leqslant \|F(a)\| \exp\int_a^t c(s)\,ds,$$

что эквивалентно требуемому неравенству. Лемма доказана.

Ниже через Ψ обозначается класс последовательностей $\{F_k(t)\}$ матриц-функций на $[a, b]$, удовлетворяющих условиям

$$\int_a^b \|F_k(t)\|\,dt \leqslant \mathrm{const} < \infty \ (k = 1, 2, \dots), \quad F_k^V(t) \rightrightarrows 0 \ (k \to \infty). \tag{2.16}$$

В частности, Ψ содержит все последовательности, сходящиеся к нулю в $L[a, b]$.

Лемма 2.3. *Если* $\{A_k(t)\} \in \Psi$, *то решения* (2.10) *удовлетворяют условию* $X_k(t) \rightrightarrows$ $\rightrightarrows I$ $(k \to \infty)$.

Действительно, полагая $X_k = (I + A_k^V)Y_k$, находим

$$\dot{Y}_k = (I + A_k^V)^{-1} A_k A_k^V Y_k, \quad Y_k(a) = I.$$

Теперь достаточно оценить $Y_k(t)$ по лемме 2.2, чтобы убедиться в равномерной сходимости Y_k (а следовательно, и X_k) к I.

Лемма 2.4. *Пусть* $\{F_k(t)\} \in \Psi$ *и последовательность* $\{H_k(t)\}$ *удовлетворяет условию*

$$H_k(t) \rightrightarrows H(t) \quad (k \to \infty), \quad V_a^b H(t) < \infty.$$

Тогда

$$\{F_k(t)H_k(t)\} \in \Psi, \quad \{H_k(t)F_k(t)\} \in \Psi.$$

Так как $H_k = (H_k - H) + H$ и многообразие Ψ линейно, то достаточно показать, что класс Ψ инвариантен относительно почленного умножения (справа и слева) на $\{G_k(t)\}$ в любом из следующих случаев:

1) $G_k(t) \rightrightarrows 0$;

2) $G_k(t)$ равномерно ограничены вместе со своими вариациями на $[a, b]$[1].

Случай 1) совершенно очевиден: здесь соответствующие последовательности даже сходятся к нулю в $L[a, b]$. Проверка 2) сводится к интегрированию по частям, например, для $\{F_k H_k\}$ имеем

$$\left\| \int_a^t F_k(s) G_k(s)\, ds \right\| = \left\| F_k^V(t) G_k(t) - \int_a^t F_k^V(s)\, dG_k(s) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \|F_k^V(t)\| \left[\max_{a \leqslant t \leqslant b} \|G_k(t)\| + V_a^b G_k \right],$$

откуда и вытекает требуемое.

Переходим к теореме 2.1. Поскольку уравнения (2.10) и (2.12) входят в формулировку равноправно с точностью до переобозначений, то достаточно проверить импликацию (2.11)→(2.15). Пусть (2.11) выполнено. Покажем, что тогда имеет место соотношение

$$W_k(t) \overset{Df}{=} U_0^{-1}(t) X_0(t) X_k^{-1}(t) U_k(t) \rightrightarrows I \quad (k \to \infty), \tag{2.17}$$

очевидно, эквивалентное (2.15).

Непосредственный подсчет показывает, что $W_k(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{W}_k = C_k(t) W_k, \quad W_k(a) = I, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$C_k = U_0^{-1} X_0 \left(X_k^{-1} B_k X_k - X_0^{-1} B_0 X_0 \right) X_0^{-1} U_0.$$

Согласно лемме 2.3, соотношение (2.17) будет доказано, если мы убедимся, что

$$\{C_k\} \in \Psi. \tag{2.18}$$

[1]Фактически нам понадобится 2) лишь для совпадающих G_k.

Из уравнений, которым удовлетворяют $X_0(t)$, $X_0^{-1}(t)$, $U_0(t)$, $U_0^{-1}(t)$, явствует, что эти матрицы-функции имеют ограниченную вариацию на $[a,b]$. Поэтому в силу леммы 2.4 вместо (2.18) достаточно проверить, что

$$\{X_k^{-1}B_kX_k - X_0^{-1}B_0X_0\} \in \Psi. \tag{2.19}$$

По условию теоремы $\{B_k - B_0\} \in \Psi$, откуда, согласно (2.11) и лемме 2.4,

$$\{X_k^{-1}(B_k - B_0)X_k\} \in \Psi. \tag{2.20}$$

В то же время

$$\{X_k^{-1}B_0X_k - X_0^{-1}B_0X_0\} \in \Psi, \tag{2.21}$$

так как стоящая в левой части последовательность сходится к нулю в $L[a,b]$. Складывая (2.20) и (2.21), получаем (2.19). Теорема доказана.

В частности, полагая $B_k(t) = -A_0(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$, получаем простое, но важное для дальнейшего

Следствие 2.1. *Соотношение* (2.11) *имеет место в том и только том случае, если* $Y_k(t) \rightrightarrows I$ $(k \to \infty)$, *где*

$$\dot{Y}_k = [A_k(t) - A_0(t)]Y_k, \quad Y_k(a) = I, \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{2.22}$$

2.5. Во многих случаях системы (2.22) оказываются более удобными для исследования, чем (2.10), а иногда допускают и непосредственное интегрирование. Именно так, в частности, обстоит дело с системами, соответствующими скалярным уравнениям n-го порядка.

В самом деле, пусть даны уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x + p_{n+1}(t) = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.23}$$

$$x_k^{(n)} + p_{1,k}(t)x_k^{(n-1)} + \dots + p_{n,k}(t)x_k + p_{n+1,k}(t) = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b), \quad k = 1, 2, \dots \tag{2.24}$$

с суммируемыми на $[a,b]$ коэффициентами и рассматривается вопрос о сходимости в $C^{n-1}[a,b]$ решений (2.24) к решениям (2.23). Перепишем по знакомой схеме (см. § 1) (2.23), (2.24) в виде однородных матричных уравнений

$$\dot{X}_k = A_k(t)X_k, \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.25}$$

где все матрицы имеют порядок $n+1$, причем

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_{n+1}(t) & -p_n(t) & -p_{n-1}(t) & \dots & -p_1(t) \end{pmatrix},$$

$A_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$ имеют аналогичный вид с заменой p_i на $p_{i,k}$. Согласно лемме 2.1, сходимость в $C^{n-1}[a,b]$ решений (2.24) к соответствующему решению (2.23) (при любых согласованных начальных условиях) эквивалентна соотношению (2.11), где X_k — решения (2.25) такие, что $X_k(a) = I$. Поскольку $A_k(t)$ суммируемы на $[a,b]$ — здесь, кстати, мы первый раз существенно используем конечность $[a,b]$ — то применимо следствие 2.1. Итак, вопрос свелся к интегрированию системы (2.22), где у матрицы $A_k - A_0$ элементы всех строк, кроме последней, равны нулю. Мы уже сталкивались с подобной системой в § 1: все строки матриц $Y_k(t) = \|y_{ij}^k(t)\|$, кроме последней, совпадают с соответствующими строками единичной матрицы, а элементы последней строки даются формулами, аналогичными (1.15) и (1.16), с заменой p_i на $p_{i,k} - p_i$. В частности,

$$y_{n+1,n+1}^k(t) = \exp \int\limits_a^t [p_1(\tau) - p_{1,k}(\tau)]\, d\tau,$$

так что требование $y_{n+1,n+1}^k \Rightarrow 1$ эквивалентно соотношению $p_{1,k}^V \Rightarrow p_1^V$. Переходя к другим функциям $y_{n+1,i}^k$, получаем в итоге следующий критерий.

Теорема 2.2. *Для того чтобы при* $k \to \infty$ *решения уравнений* (2.24) *с любыми фиксированными начальными условиями сходились в* $C^{n-1}[a,b]$ *к соответствующему решению уравнения* (2.23)*, необходимо и достаточно, чтобы при* $k \to \infty$

$$\int\limits_a^t [p_{1,k}(\tau) - p_1(\tau)]\, d\tau \Rightarrow 0, \tag{2.26}$$

$$\int\limits_a^t [p_{i,k}(s) - p_i(s)] \exp\left(\int\limits_a^s [p_{1,k}(\tau) - p_1(\tau)]\, d\tau \right) ds \Rightarrow 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n+1. \tag{2.27}$$

Тем самым для уравнений n-го порядка вопрос, поставленный в начале параграфа, полностью решен.

Подчеркнем, что (2.26), (2.27) не могут быть заменены условием

$$\int\limits_a^t [p_{i,k}(s) - p_i(s)]\, ds \Rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1 \quad (k \to \infty),$$

которое, как показывают примеры, ни при каком $n > 1$ не обеспечивает сходимости решений даже в $C[a,b]$.

Доказанный результат допускает различные модификации. Как и в теореме 1.1, можно считать, что t пробегает в комплексной плоскости некоторую спрямляемую кривую или ограниченную односвязную область, внутри которой все $p_i(t)$ и $p_{i,k}(t)$ аналитичны; если возмущение коэффициента p_1 отсутствует, можно считать x элементом банаховой алгебры. В другом направлении можно ослабить требования за счет самой теоремы 1.1. Именно, если допустить у p_i, $p_{i,k}$ наличие в концах отрезка $[a,b]$ или даже в конечном числе точек этого отрезка несуммируемых особенностей, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1, то решения матричных уравнений (2.25) будут по-прежнему определены и непрерывны в $[a,b]$, вместе с обратными матрицами $X_k^{-1}(t)$; можно показать (на чем подробнее не останавливаемся), что для применения следствия 2.1 ничего большего и не требуется.

С другой стороны, теорему 1.1 можно было бы получить с помощью теоремы 2.2, применив последнюю к уравнениям с коэффициентами

$$p_{i,k}(t) = \begin{cases} p_i(t), & k^{-1} \leqslant t \leqslant b \\ 0, & a \leqslant t \leqslant k^{-1} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

(использованный в § 1 способ является, конечно, более прямым и простым). Все это свидетельствует о тесной связи между теоремами 1.1 и 2.2, на что указывает также некоторое сходство формулировок и общие моменты в доказательствах. Чтобы полностью выявить эту связь, следует встать на точку зрения обобщенных дифференциальных уравнений.

2.6. Возвращаемся к матричным уравнениям (2.10). Напрашивается мысль ввести специальную «сходимость» коэффициентов матриц, положив, по определению, $A_k(t) \rightsquigarrow A_0(t)$ $(k \to \infty)$, если выполнено (2.11). Теорема 2.1 показывает, что при выполнении (2.13), (2.14) не только $B_k \rightsquigarrow B_0$, но, более того, соотношение $A_k \rightsquigarrow A_0$ влечет за собой $A_k + B_k \rightsquigarrow A_0 + B_0$ для любой последовательности $\{A_k\}$ (в частности, к обеим частям соотношения $A_k \rightsquigarrow A_0$ можно добавить суммируемую B_0). Все же эту идею нельзя считать удачной, поскольку подобная «сходимость» не обеспечивает в целом непрерывности линейных операций. Чтобы убедиться в этом, прибегнем снова к примеру (2.5) при $\alpha = \beta = 0.5$, переписав его в однородной матричной форме. Именно, легко проверить, что при $k \to \infty$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k}\cos kt & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{k}\sin kt \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

хотя, как уже отмечалось,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k}\cos kt & \sqrt{k}\sin kt \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.7. Оставим абстрактные соображения, которые здесь, видимо, малополезны, и перейдем к более конкретным вопросам. Положим

$$R_k(t) = A_k(t) - A_0(t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

и исследуем различные дополнительные условия, которые обеспечивают эквивалентность (2.11) и соотношения

$$R_k^V(t) \rightrightarrows 0 \quad (k \to \infty). \tag{2.28}$$

Теорема 2.3. *Пусть выполняется по крайней мере одно из соотношений*

1) $\displaystyle\int_a^b \|R_k(t)\|\,dt \leqslant c < \infty \quad (k = 1, 2, \ldots);$

2) $\displaystyle\int_a^b \|R_k(t)R_k^V(t)\|\,dt \to 0 \quad (k \to \infty);$

3) $\displaystyle\int_a^b \|R_k^V(t)R_k(t)\|\,dt \to 0 \quad (k \to \infty);$

4) $\displaystyle\int_a^b \|R_k(t)R_k^V(t) - R_k^V(t)R_k(t)\|\,dt \to 0 \quad (k \to \infty).$

Тогда условие (2.28) *необходимо и достаточно для* (2.11).

В части, относящейся к достаточности, условие 1) более ограничительно, чем каждое из трех других, и поэтому не представляет интереса; в остальном 1)—4) попарно независимы. Каждое из условий 2)—4) выполняется, в частности, для систем, соответствующих матричным уравнениям n-го порядка (2.23), (2.24), если возмущение коэффициента при $x^{(n-1)}$ отсутствует (т. е. $p_{1,k} \equiv p_1$, $k = 1, 2, \dots$); действительно, в этом случае, $R_k R_k^V \equiv R_k^V R_k \equiv 0$ при всех k. Тем самым ещё раз подтверждается справедливость теоремы 2.2 для подобных уравнений.

Другим простым следствием теоремы 2.3 является упоминавшаяся выше эквивалентность соотношений (2.2) и (2.3) в случае (2.4); для проверки достаточно переписать уравнения (2.1) в однородной форме, согласно (2.8), (2.9), и сослаться на 2).

Не исключено, что 1)—4) являются частными случаями какого-то общего и достаточно просто формулируемого соотношения. Этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании.

Переходим к доказательству. Согласно следствию 2.1, вместо (2.10) можно рассматривать уравнения

$$\dot{Y}_k = R_k(t) Y_k,\ Y_k(a) = I, \quad k = 1, 2, \dots\ (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.29}$$

причем роль (2.11) переходит к соотношению

$$Y_k(t) \rightrightarrows I \quad (k \to \infty). \tag{2.30}$$

Начнем со случая 1). Здесь должна быть установлена лишь необходимость (2.28). С помощью умножения слева на Y^{-1} и дифференцирования легко проверить соотношение (индекс k для простоты записи будем опускать)

$$R^V(t) = Y(t) - I - Y(t) \int\limits_a^t Y^{-1}(s) R(s) R^V(s)\, ds. \tag{2.31}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и k столь велико, что для $Y(t) = Y_k(t)$ выполнены неравенства

$$\|Y(t) - I\| \leqslant \varepsilon, \quad \|Y^{-1}(t) - I\| \leqslant \varepsilon, \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Тогда в силу (2.31)

$$\|R^V(t)\| \leqslant \varepsilon + (1+\varepsilon)^2 \int\limits_a^t \|R(s)\| \|R^V(s)\|\, ds,$$

откуда, оценивая $\|R^V(t)\|$ по Гронуоллу—Беллману с учетом 1), получаем

$$\|R^V(t)\| \leqslant \varepsilon e^{c(1+\varepsilon)^2} \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Требуемое соотношение $\{1) + (2.30)\} \to (2.28)$ доказано. Импликация $\{2) + (2.30)\} \to \to (2.28)$ вытекает из (2.31) очевидным образом. Что касается импликации $\{3) + + (2.30)\} \to (2.28)$, то для нее вместо (2.31) достаточно принять несколько иное соотношение

$$R^V(t) = I - Y^{-1}(t) + \Big(\int\limits_a^t R(s) R^V(s) Y(s)\, ds \Big) Y^{-1}(t),$$

которое получается из (2.29) интегрированием по частям.

В части, относящейся к необходимости, случаи 1)—3), таким образом, рассмотрены. Чтобы установить достаточность (2.28) для (2.30) в условиях 2) или 3), произведем соответственно замены (первая из них аналогична той, которая применялась при доказательстве леммы 2.3)

$$U(t) = \left[I + R^V(t)\right]^{-1} Y(t), \quad W(t) = \left[I - R^V(t)\right]^{-1} Y(t).$$

Нетрудно проверить, что U и W удовлетворяют уравнениям

$$\dot{U} = (I + R^V)^{-1} R R^V U, \quad U(a) = I,$$

$$\dot{W} = -R R^V (I - R^V)^{-1} W, \quad W(a) = I.$$

Теперь достаточно оценить $U(t)$ и $W(t)$ по лемме 2.2, чтобы получить требуемые соотношения $\{2) + (2.28)\} \to (2.30)$, $\{3) + (2.28)\} \to (2.30)$

Случаи 1)—3) рассмотрены. Переходим к случаю 4), который, безусловно, наиболее интересен. Здесь нам понадобится следующая оценка.

2.8.

Лемма 2.5. *В любой точке дифференцируемости матрицы-функции $F(t)$ справедливы неравенства*

$$\left.\begin{aligned} &\left\| \frac{d}{dt} e^{F(t)} - \dot{F}(t) e^{F(t)} \right\| \\ &\left\| \frac{d}{dt} e^{F(t)} - e^{F(t)} \dot{F}(t) \right\| \end{aligned}\right\} \leqslant \frac{1}{2} e^{\|F(t)\|} \|\dot{F}(t) F(t) - F(t) \dot{F}(t)\|. \tag{2.32}$$

Ограничимся доказательством верхнего из неравенств (2.32), поскольку нижнее доказывается аналогично. Введем обозначения

$$K(t) = \dot{F}(t) F(t) - F(t) \dot{F}(t),$$

$$C_{m,n}(t) = F^{m-1}(t) \dot{F}(t) F^{n-m}(t) \quad (1 \leqslant m \leqslant n).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|C_{r+1,n} - C_{r,n}\| = \|F^{r-1}(\dot{F}F - F\dot{F})F^{n-r-1}\| = \\ = \|F^{r-1} K F^{n-r-1}\| \leqslant \|K\| \|F\|^{n-2} \quad (1 \leqslant r < n), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \|C_{m,n} - C_{1,n}\| \leqslant \|C_{m,n} - C_{m-1,n}\| + \|C_{m-1,n} - C_{m-2,n}\| + \dots + \\ + \|C_{2,n} - C_{1,n}\| \leqslant (m-1)\|K\| \|F\|^{n-2} \quad (1 \leqslant m \leqslant n). \end{aligned}$$

В силу последнего неравенства

$$\left\| \frac{d}{dt} F^n - n \dot{F} F^{n-1} \right\| = \left\| \sum_{m=1}^{n} C_{m,n} - n C_{1,n} \right\| \leqslant \sum_{m=2}^{n} \|C_{m,n} - C_{1,n}\| \leqslant \frac{1}{2} n(n-1) \|K\| \|F\|^{n-2}.$$

Наконец, находим

$$\Big\|\frac{d}{dt}e^F - \dot{F}e^F\Big\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big\|\frac{d}{dt}F^n - n\dot{F}F^{n-1}\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|K\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}\|F\|^{n-2} = \frac{1}{2}\|K\|e^{\|F\|}.$$

Лемма доказана. Тот же прием «переброски» позволяет, очевидно, оценивать (в круге сходимости степенного ряда)

$$\Big\|\frac{d}{dt}\varphi(F) - \dot{F}\varphi'_F\Big\|, \quad \Big\|\frac{d}{dt}\varphi(F) - \varphi'_F\dot{F}\Big\|$$

через $\|K(t)\|$, $\|F(t)\|$ для любой аналитической $\varphi(F)$.

Покажем теперь, что в случае 4) теоремы 2.3 (2.28) влечет за собой (2.30). Дифференцируя матрицу $Z(t) = Y^{-1}(t)\exp R^V(t)$ (индекс k по-прежнему опускается), находим

$$\dot{Z} = Ze^{-R^V}\Big(\frac{d}{dt}e^{R^V} - Re^{R^V}\Big), \tag{2.33}$$

откуда, согласно лемме 2.5,

$$\|\dot{Z}\| \leqslant \frac{1}{2}\|e^{-R^V}\|e^{\|R^V\|}\|RR^V - R^VR\|\|Z\|.$$

Так как $Z(a) = I$, мы можем теперь оценить $Z(t)$ по лемме 2.2. Эта оценка показывает, что в случае 4) $Z = Z_k \rightrightarrows I$; то же самое, следовательно, относится и к $Y = Y_k$.

Для завершения доказательства теоремы осталось установить соотношение $\{4) + (2.30)\} \to (2.28)$. Пусть 4) и (2.30) выполнены и пусть k столь велико, что величина $\varepsilon = \varepsilon_k$, определенная формулой

$$\varepsilon = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\|Y(t) - I\| + \max_{a\leqslant t\leqslant b}\|Y(t)\|\int\limits_a^b\|Y^{-1}(s)\|\|R(s)R^V(s) - R^V(s)R(s)\|\,ds,$$

удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon < \frac{1}{2}; \tag{2.34}$$

покажем, что тогда

$$\|R^V(t)\| \leqslant -\ln(1-\varepsilon) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.35}$$

откуда непосредственно вытекает требуемое утверждение. Предположим противное: пусть (2.35) не имеет места. Тогда в силу (2.34), непрерывности $\|R^V(t)\|$ по t и равенства $\|R^V(a)\| = 0$ найдется t_0 из интервала (a, b) такое, что

$$\|R^V(t_0)\| > -\ln(1-\varepsilon), \tag{2.36}$$

$$\|R^V(t)\| \leqslant \ln 2 \quad (a \leqslant t \leqslant t_0). \tag{2.37}$$

Интегрируя (2.33), находим

$$e^{R^V(t)} - I = Y(t) - I + Y(t)\int\limits_a^t Y^{-1}(s)\Big[\frac{d}{ds}e^{R^V(s)} - R(s)e^{R^V(s)}\Big]\,ds,$$

откуда, согласно лемме 2.5 и неравенству (2.37),

$$\|e^{R^V(t)} - I\| \leqslant \|Y(t) - I\| + \\ + \frac{1}{2}\|Y(t)\| \int\limits_a^t e^{\|R^V\|}\|Y^{-1}\|\|RR^V - R^V R\|\,ds \leqslant \varepsilon \quad (a \leqslant t \leqslant t_0). \quad (2.38)$$

Из (2.37) ясно, что при $t \in [a, t_0]$ $R^V(t)$ есть главное значение логарифма $\exp R^V(t)$. Поэтому на основании (2.34), (2.38) находим

$$\|R^V(t)\| = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(I - e^{R^V(t)}\Big)^n \Big\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big\|e^{R^V(t)} - I\Big\|^n \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n} = -\ln(1-\varepsilon) \quad (a \leqslant t \leqslant t_0).$$

Полученное противоречие с (2.38) завершает доказательство теоремы 2.3.

2.9. Помимо знакомых уже вариантов обобщений добавим, что в теореме 2.3 конечность промежутка $[a, b]$ фактически не использовалась; при бесконечном промежутке теряет силу лишь сделанное выше замечание о применимости теоремы 2.2 к матричным уравнениям n-го порядка. Попутно заметим, что конечность промежутка не использовалась и при доказательстве теоремы 2.1, тогда как теорема 2.2 на бесконечные промежутки не распространяется. Последнее обстоятельство иллюстрируется примером:

$$\ddot{x}_k + \frac{1}{kt^2}x_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (1 \leqslant t < \infty).$$

Вернемся к примеру Я. Курцвейля (2.5). Ясно, что теорема 2.2, охватывающая скалярные уравнения любого порядка, полностью «объясняет» этот пример. В то же время теорема 2.3 позволяет объяснить основную импликацию (2.7) $\to$ (2.6) и с более общей матричной точки зрения. Действительно, переходя к однородной матричной записи, получаем коэффициентные матрицы $R_k(t)$ вида

$$R_k(t) = \begin{pmatrix} k^{1-\alpha}\cos kt & k^{1-\beta}\sin kt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \; R_k^V(t) = \begin{pmatrix} k^{-\alpha}\sin kt & k^{-\beta}(1-\cos kt) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Случаи 1)—3) теоремы 2.3 здесь оказываются недостаточными, так как помимо (2.7) требуют дополнительных ограничений; однако 4) ведет к цели, поскольку

$$R_k(t)R_k^V(t) - R_k^V(t)R_k(t) = \begin{pmatrix} 0 & k^{1-\alpha-\beta}(\cos kt - 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.10. Некоторые из установленных выше фактов находят приложения в смежных вопросах. Остановимся на одном таком приложении леммы 2.5.

Общеизвестно, что матричное уравнение

$$\dot{X} = A(t)X \quad (a \leqslant t < b \leqslant \infty) \quad (2.39)$$

с локально суммируемой внутри $[a, b)$ матрицей $A(t)$ имеет решение вида

$$X_0(t) = I + o(1) \quad (t \uparrow b), \quad (2.40)$$

если $A(t)$ абсолютно суммируема на $[a, b)$. А. Винтнер [9] заметил, что последнее ограничение можно ослабить следующим образом[1].

Теорема 2.4 (А. Винтнер [9]). *Пусть $A(t)$ интегрируема на $[a, b)$ (вообще говоря, неабсолютно), т. е. существует*

$$A^0(t) = \int\limits_t^b A(s)\, ds. \tag{2.41}$$

Если выполнено хотя бы одно из условий

$$\int^b \|A^0(t)A(t)\|\, dt < \infty, \quad \int^b \|A(t)A^0(t)\|\, dt < \infty,$$

то уравнение (2.39) *обладает решением вида* (2.40).

Из леммы 2.5 вытекает дополняющее этот результат

Следствие 2.2. *Если первообразная* (2.41) *существует и удовлетворяет условию*

$$\int^b \|A^0(t)A(t) - A(t)A^0(t)\|\, dt < \infty,$$

то уравнение (2.39) *обладает решением вида* (2.40).

Для доказательства произведем замену

$$Y(t) = e^{A^0(t)}X(t).$$

Тогда (2.39) перейдет в уравнение

$$\dot{Y} = C(t)Y, \quad \text{где} \quad C = \Big(\frac{d}{dt}e^{A^0} + e^{A^0}A\Big)e^{-A^0}. \tag{2.42}$$

Так как $\dot{A}^0 = -A$, то по лемме 2.5

$$\|C(t)\| \leqslant \frac{1}{2}e^{2\|A^0(t)\|}\|A^0(t)A(t) - A(t)A^0(t)\| \quad (a \leqslant t < b).$$

Согласно предположению, это влечет за собой суммируемость $C(t)$ на $[a, b)$. Таким образом, уравнение (2.42) обладает решением вида (2.40); следовательно, это верно и для уравнения (2.39), так как $A^0(t) = o(1)$ при $t \uparrow b$. Следствие доказано.

Наличие у (2.39) решения вида (2.40), очевидно, эквивалентно следующему утверждению: каждое нетривиальное решение $X(t)$ уравнения (2.39) имеет при $t \uparrow b$ конечный ненулевой предел $X(b)$. Этот предел дается формулой $X(b) = X(a)X_0^{-1}(a)$.

Всюду выше уравнения вида $\dot{X} = AX$ можно было бы, разумеется, заменить уравнениями $\dot{X} = XB$, что соответствует переходу к сопряженным уравнениям.

[1] Мы приводим результат Винтнера в обобщенной формулировке, т. к. в [9] рассматривался лишь случай $b = \infty$.

§ 3. Обобщенные уравнения

3.1. Рамки уравнения с суммируемыми коэффициентами часто оказываются стеснительными в некоторых отношениях, и возникает необходимость в более широких классах уравнений, которые именуются «обобщенными», «квазидифференциальными» и т. п. Здесь имеется несколько существенно различных подходов, в зависимости от желаемого характера обобщения. В настоящем параграфе рассматриваются некоторые возникающие в этой связи принципиальные моменты.

В основу того или иного построения обобщенных уравнений обычно кладется одна из следующих концепций.

1°. Дифференциальное уравнение заменяется интегральным, в котором интеграл трактуется в расширенном смысле. Собственно говоря, уже уравнения с суммируемыми коэффициентами получены из уравнений с непрерывными коэффициентами подобным приемом — заменой риманова интеграла лебеговым. Дальнейшее продвижение возможно в направлении интегралов Данжуа—Перрона либо Стильтьеса (либо в обоих направлениях сразу). К интегрированию по Данжуа—Перрону мы фактически уже подведены теоремой 1.1, где характеризуются несуммируемые особенности коэффициентов $p_i(t)$ в точке $t_0 = a$, не влияющие на определенность $x^{(i)}(t_0)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. В каком смысле должны пониматься интегралы, фигурирующие в (1.3), и те, что появляются при почленном однократном интегрировании по t равенства (1.1)? Если, как в теореме 1.1, t_0 есть концевая точка $[a, b]$, то можно, очевидно, их считать просто несобственными интегралами Лебега (почему данный вопрос и не обсуждался в 1.1). В то же время теорема 1.1 показывает, что подобные особенности коэффициентов допустимы и внутри основного промежутка $[a, b]$, так как продолжение решений через каждую такую точку $t = t_0$ не вызывает трудностей. В этом случае (особенно, если число таких точек внутри $[a, b]$ бесконечно) интегрирование по Лебегу уже не годится и должно быть заменено интегрированием по Данжуа—Перрону. Мы не углубляемся далее в этом направлении, уводящем от дифференциальных уравнений в теорию интегрирования функций вещественной переменной. Что касается обобщений стильтьесовского типа, с которыми мы пока не сталкивались и которые представляют больший интерес для приложений, то они в дальнейшем будут подробно обсуждаться.

2°. Обобщенное уравнение трактуется как последовательность классических уравнений, коэффициенты которых «неограниченно сближаются». В последний термин может вкладываться различный смысл, однако всегда важно, чтобы «сближение» коэффициентов обеспечивало сходимость решений (с фиксированными начальными условиями) — либо точечную, либо в некотором функциональном пространстве. Соответствующий предел и объявляется решением обобщенного уравнения.

Разумеется, обе концепции 1° и 2° часто соприкасаются. Вторая из них, более аналитическая по духу, вполне может применяться и самостоятельно. По отношению к 1° дело обстоит несколько иначе: конструкции, основанные на формальном переходе к интегральному уравнению (с тем или иным способом интегрирования) и не подкрепленные соображениями непрерывности, могут оказаться недостаточно оправданными, как будет видно из дальнейшего.

3.2. Сказанное выше относится как к линейным, так и нелинейным уравнениям. Здесь уместно упомянуть серию работ Я. Курцвейля [10, 58, 62], где развивалось одно из возможных обобщений обыкновенных (вообще говоря, нелинейных) уравнений. Формулировки результатов этих работ довольно громоздки, но заметно упрощаются в интересующем нас случае линейного уравнения, которое Я. Курцвейль записывает в виде

$$\dot{X} = d[A(t)X + B(t)] \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{3.1}$$

и трактует как интегральное уравнение

$$X(t) = X(a) + \int_a^t [dA(\tau)X(\tau) + dB(\tau)] \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

с интегрированием по Перрону, но в несколько обобщенном смысле. Для нас сейчас существенно, что основные ограничения, накладываемые при этом на $A(t)$, $B(t)$, имеют, приблизительно говоря, вид

$$\|A(t+h) - A(t)\| \leqslant c_1 h^{\alpha}, \quad \|B(t+h) - B(t)\| \leqslant c_2 h^{\beta}, \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{3.2}$$

где

$$\alpha > 0.5, \quad \alpha + \beta > 1. \tag{3.3}$$

В этих условиях Курцвейль устанавливает для (3.1) теоремы о существовании, единственности и предельном переходе (в части, относящейся к линейным уравнениям, работа [10] содержит ошибку, исправленную в [58]). Обобщенные уравнения, рассматриваемые Курцвейлем, несколько отклоняются от очерченной выше схемы, поскольку они не включают в себя класс уравнений с суммируемыми коэффициентами: очевидно, из абсолютной непрерывности $A(t)$, $B(t)$ не вытекают соотношения (3.2)—(3.3). Вместе с тем в класс, изучаемый Курцвейлем, попадают некоторые уравнения с несуммируемыми коэффициентами, поскольку ограниченность вариации $A(t)$, $B(t)$ при подходе Курцвейля не требуется. Ниже, говоря о матричных обобщенных уравнениях, мы обычно будем требовать ограниченность вариации «первообразных от коэффициентов», но не будем накладывать никаких ограничений на модули непрерывности в $C[a,b]$; более того, наибольшее внимание ниже уделяется разрывному случаю. Результаты настоящего параграфа являются, таким образом, независимыми по отношению к работам Курцвейля, а в части, относящейся к скалярным уравнениям n-го порядка, — существенно более сильными.

3.3. Как видно из предыдущих параграфов, можно, не ограничивая общности, рассматривать только однородные матричные уравнения с единичным начальным условием (это в той же степени относится к обобщенным уравнениям). Запишем такое уравнение в виде

$$dX = dM(t)X, \quad X(a) = I \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{3.4}$$

$M(t) = \|m_{ij}(t)\|_1^n$, или, переходя к интегральному уравнению,

$$X(t) = I + \int_a^t dM(s)X(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.5}$$

Вопрос о том, как интерпретировать эти равенства, является основным.

Пусть вначале $M(t)$ не только имеет ограниченную вариацию, но и непрерывна в $[a,b]$. Тогда все просто: интеграл в (3.5) есть обычный интеграл Римана—Стильтьеса. Нетрудно видеть (см., например, [12]), что уравнение (3.5) — а следовательно, и (3.4), которое по определению эквивалентно (3.5), — имеет единственное решение $X(t)$. Это решение, очевидно, также непрерывно и имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$.

Оно может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. вычислением последовательных частичных сумм сходящегося ряда

$$X(t) = I + M(t) + \int_a^t dM(t_1)M(t_1) + \int_a^t dM(t_1)\int_a^{t_1} dM(t_2)M(t_2) + \dots \tag{3.6}$$

Здесь и далее без ограничения общности предполагается, что

$$M(a) = 0.$$

Сходимость ряда (3.6) сразу следует из условия $V_a^b M < \infty$.

Ясно, что уравнения вида (3.4) или, что то же самое, (3.5) охватывают классические дифференциальные уравнения $\dot{X} = A(t)X$ с суммируемыми по Лебегу $A(t)$, так как достаточно положить

$$M(t) = \int_a^t A(s)\,ds \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

с интегрированием по Лебегу. Классический случай соответствует, таким образом, абсолютно непрерывным на $[a,b]$ $M(t)$.

Данное обобщение подкрепляется предложением о предельном переходе для уравнений

$$X_k(t) = I + \int_a^t dM_k(s)X_k(s), \quad k = 0,1,\dots (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.7}$$

Именно, *если непрерывные $M_k(t)$ удовлетворяют условиям*

$$V_a^b M_k \leqslant c < \infty, \quad k = 1,2,\dots, \tag{3.8}$$

$$M_k(t) \rightrightarrows M_0(t) \quad (k \to \infty), \tag{3.9}$$

то $X_k(t) \rightrightarrows X_0(t)$ $(k \to \infty)$. Этот факт (см., например, [7]) непосредственно усматривается из сравнения рядов вида (3.6) для $M_k(t)$, $k = 0,1,\dots$; по существу он содержится также в более общих результатах § 2. Правда, формально § 2 относится к абсолютно непрерывным $M(t)$, но это требование фактически влияет лишь на форму записи, и все результаты § 2 легко распространяются на уравнения вида (3.4) с непрерывными $M(t)$ при соответствующих требованиях на вариации $m_{ij}(t)$. Остановимся в этой связи лишь на аналоге теоремы 2.2, который интересен тем, что не содержит ограничений, связанных с вариацией. Поэтому здесь представляется естественной другая трактовка, не связанная непосредственно с интегральным уравнением стильтьесовского типа (3.5) и примыкающая к концепции 2°.

3.4. Именно, рассмотрим уравнение, формально записанное следующим образом:

$$\frac{d}{dt}[e^{r_0(t)}x^{(n-1)}] + \dot{r}_1(t)x^{(n-2)} + \dots + \dot{r}_{n-1}(t)x + \dot{r}_n(t) = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.10}$$

Пусть вначале все $r_i(t)$ абсолютно непрерывны на $[a,b]$, т. е. (3.10) есть классическое уравнение (2.23) с суммируемыми на $[a,b]$ коэффициентами

$$p_1(t) = \dot{r}_0(t), \quad p_i(t) = e^{-r_0(t)}\dot{r}_{i-1}(t), \quad i = 2,3,\dots,n+1.$$

С точностью до несущественных постоянных последние равенства можно переписать в знакомом виде

$$r_0(t) = \int_a^t p_1(\tau)\,d\tau,\ r_i(t) = \int_a^t \Big(\exp\int_a^s p_1(\tau)\,d\tau\Big) p_{i+1}(s)\,ds, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим через $C[a,b]_{n+1}$ пространство $n+1$-мерных непрерывных на $[a,b]$ вектор-функций, а через $C_*[a,b]_{n+1}$ — подмножество этого пространства, состоящее из вектор-функций, абсолютно непрерывных на $[a,b]$. Пусть, далее $x_i(t)$ есть решение уравнения (3.10), удовлетворяющее начальным условиям (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$x_i^{(j)}(a) = \delta_{ij}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{3.11}$$

Отображение π, определенное формулой

$$\{r_0(t), r_1(t), \ldots, r_n(t)\} \to \{x_0^{(n-1)}(t), x_1^{(n-1)}(t), \ldots, x_n^{(n-1)}(t)\}, \tag{3.12}$$

преобразует $C_*[a,b]_{n+1}$ в себя и притом, как показывает теорема 2.2, непрерывно. Более того, просматривая оценки, на которых основывалось доказательство этой теоремы, нетрудно проверить, что π равномерно непрерывно (и даже удовлетворяет условию Липшица) во всякой ограниченной части $C_*[a,b]_{n+1}$. Поскольку $C_*[a,b]_{n+1}$ всюду плотно в $C[a,b]_{n+1}$, π допускает непрерывное продолжение на все пространство. *Полученное таким образом отображение*

$$\pi : C[a,b]_{n+1} \to C[a,b]_{n+1}$$

(также удовлетворяющее условию Липшица в каждом шаре) *определяет естественным образом решения уравнения* (3.10) *при любых непрерывных* $r_0, r_1, \ldots, r_n$.

Итак, если непрерывным коэффициентам соответствуют решения класса $C^n[a,b]$, а суммируемым — класса $C_*^{n-1}[a,b]$ (т. е. с абсолютно непрерывной $x^{(n-1)}$), то теперь мы пришли к решениям класса $C^{n-1}[a,b]$. Описанная схема в определенном смысле является исчерпывающей для получения решений данного, так сказать, «уровня обобщенности» (который, как будет видно из дальнейшего, не является пределом).

Подчеркнем, что, хотя решения уравнения (3.10) определены через аппроксимацию, для практического их отыскания нет необходимости приближать $r_i(t)$ гладкими функциями и решать полученную таким образом последовательность аппроксимирующих уравнений. Решения (3.10) могут быть и непосредственно записаны в виде сходящегося ряда, одинаково пригодного для гладкого и негладкого случаев, так как в его члены входят значения лишь $r_i(t)$, но не их производных.

3.5. До сих пор рассматривались уравнения с коэффициентами, которые являются — в обобщенном смысле — производными непрерывных функций. Такие уравнения представляют определенный теоретический интерес; однако с точки зрения приложений значительно более важен класс уравнений с «импульсными» коэффициентами, являющимися производными разрывных функций. К уравнениям этого типа мы и переходим.

Наиболее известный пример такого рода дает уравнение собственных колебаний струны

$$\ddot{x} + \lambda q(t) x = 0 \tag{3.13}$$

(при тех или иных краевых условиях), масса которой сосредоточена в виде отдельных «бусинок», т. е.

$$q(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i \delta(t - t_i) \quad (c_i > 0, 1 \leqslant m \leqslant \infty). \tag{3.14}$$

Через $\delta(t)$ здесь и далее обозначается δ-функция. В первую очередь следует упомянуть известную работу М. Г. Крейна [63], где, в частности, на основе уравнения (3.13), (3.14) была предложена наглядная «механическая» интерпретация классических исследований Стильтьеса по цепным дробям. В этой и последующих работах (по поводу которых см. монографию Ф. Аткинсона [12] с дополнениями И. С. Каца и М. Г. Крейна) развивалась спектральная теория уравнения (3.13) с $q(t)$, представляющей собой производную возрастающей и, вообще говоря, разрывной функции. На вопросах, связанных со спектральными разложениями симметричных операторов, при всей их важности, мы здесь не останавливаемся. Что касается самого понятия решения, то для уравнений данного вида оно может быть определено несколькими эквивалентными способами: либо как решение соответствующего интегрального уравнения (М. Г. Крейн [63], И. С. Кац [64]), либо через «квазипроизводные» (В. Феллер [65]). Различные аспекты качественной теории также приводят к уравнениям с коэффициентами типа дельта-функций — зачастую в связи с экстремальными свойствами таких уравнений. Приведем пример, к которому неоднократно будем возвращаться в дальнейшем.

Пусть для уравнения

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \tag{3.15}$$

с вещественным коэффициентом $q(t)$ таким, что

$$q(t + \omega) \equiv q(t), \quad q(t) \not\equiv 0, \quad \int_0^\omega q(t)dt > 0, \tag{3.16}$$

исследуется вопрос об устойчивости решений при $t \to \infty$. Общеизвестным достаточным условием устойчивости является неравенство

$$\int_0^\omega q_+(t)dt \leqslant \frac{4}{\omega} \quad \big(q_+(t) \overset{Df}{=} \max\{0, q(t)\}\big), \tag{3.17}$$

которое для $q(t) \geqslant 0$ было указано еще Ляпуновым [14]; обобщение в форме (3.17) принадлежит М. Г. Крейну [15]. Интерес представляет не только достаточность этого условия, но и тот хорошо известный факт, что постоянная 4 не может быть заменена никакой большей. Как кратчайшим образом доказать последнее утверждение? Совсем простой подсчет показывает, что уравнение (3.15) с коэффициентом

$$q(t) = \frac{4 + \varepsilon}{\omega} \delta\Big(t - \frac{\omega}{2}\Big) \quad (0 \leqslant t \leqslant \omega), \ q(t + \omega) \equiv q(t) \tag{3.18}$$

имеет неограниченные решения, если $\varepsilon \geqslant 0$; однако такая аргументация сама по себе не может быть признана исчерпывающей. Ведь в первую очередь интересна неулучшаемость условия (3.17) в классе «хороших», например непрерывных, коэффициентов; на коэффициенты типа дельта-функций признак (3.17), строго говоря, даже не рассчитан, как показывает случай $\varepsilon = 0$ (на самом деле (3.17) распространяется и на такие коэффициенты, если заменить знак неравенства на строгий). Чтобы полноправно пользоваться примерами типа (3.18), необходимо опираться на возможность соответствующего предельного перехода. В данном случае это означает, что при «дельтаобразной» аппроксимации коэффициента (3.18) непрерывными коэффициентами будет иметь место сходимость на $[0,\omega]$ соответствующих решений вместе с производными (при $t \neq \omega/2$). При этом удобнее взять в (3.18) не $\varepsilon = 0$, а произвольно малое $\varepsilon > 0$, что обеспечивает грубый характер неустойчивости (мультипликаторы вне единичной окружности).

Практически, чтобы избежать хлопот, обычно выбирают (см., например, Б. П. Демидович [66]) иной путь, а именно, не рассматривая уравнения (3.18), строят в явном виде последовательность уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами «дельтаобразного» типа и непосредственно проводят необходимые вычисления (которые в данном случае не очень велики). Однако ясно, что включение в общую теорию уравнений с коэффициентами типа дельта-функций — если оно подкреплено теоремами о предельном переходе — значительно упрощает рассмотрение подобных вопросов.

Идея изучения уравнений вида (3.4) с разрывной $M(t)$ сама по себе не нова. В частности, попытка изложения такого общего подхода имеется в упоминавшейся уже монографии [12] Ф. Аткинсона (с. 412—417), где можно найти также дальнейшие ссылки. Однако при подходе, изложенном в [12], по существу игнорируются некоторые принципиальные моменты, которые отсутствуют в случае систем, соответствующих уравнению (3.15), но неизбежно возникают при построении общей теории уравнения (3.4) с разрывной $M(t)$.

3.6. Предположим пока, как и в [12], что матрица-функция $M(t)$ ограниченной вариации непрерывна справа на $[a,b]$. Что следует понимать под решением обобщенного дифференциального уравнения (3.4)?

Переход от (3.4) к (3.5) не дает полного ответа, поскольку здесь в свою очередь возникает вопрос (которого не было в непрерывном случае) о том, как понимать интеграл в правой части (3.5). Трактовка в смысле Римана—Стильтьеса (Р.-С.) возможна, если, например, $X(t)$ непрерывна во всех точках разрыва $M(t)$; само уравнение (3.5) показывает, однако, что на это рассчитывать не приходится. Тем не менее интегрирование по Р.-С. не обесценивается последним обстоятельством, свидетельствующим лишь о том, что здесь целесообразно перейти от общих матричных рассмотрений к более подробным поэлементным.

Обозначим через Ωf множество точек разрыва $f(t)$ на $[a,b]$. Легко видеть, что *интеграл в* (3.5) *можно трактовать по Р.-С. в том и только том случае, если элементы матрицы* $M(t) = \|m_{ij}(t)\|_1^n$ *удовлетворяют следующему условию:*

$$\Omega m_{ij} \bigcap \Omega m_{ki} = \varnothing \quad i,j,k \in [1,n]. \tag{3.19}$$

В самом деле, при этом условии интегральный оператор

$$AW = \int_a^t dM(s)W(s) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$$

переводит в себя многообразие матриц-функций $W(t) = \|w_{ij}(t)\|_1^n$, имеющих ограниченную вариацию в $[a,b]$, непрерывных справа и удовлетворяющих условию:

$$\Omega w_{ij} \bigcap \Omega m_{ki} = \varnothing \quad i,j,k \in [1,n].$$

Так как $M(t)$ принадлежит этому многообразию, то определены все итерации A^sM, $s = 1,2,\ldots$, т. е. все члены ряда (3.6). Этот ряд и доставляет решение уравнения (3.5). Сходимость ряда и единственность решения проверяются обычным способом.

Отметим, что (3.19) содержит, в частности, требование непрерывности всех диагональных элементов $m_{ij}(t)$. Для матричного уравнения, соответствующего скалярному уравнению (3.15), условие (3.19) выполняется очевидным образом. В случае скалярного уравнения общего вида

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x + p_{n+1}(t) = 0 \tag{3.20}$$

(3.19) сводится к непрерывности первообразной $p_1^V(t)$ от $p_1(t)$.

Описанное решение устойчиво относительно предельного перехода (должным образом определенного, см. ниже), так что случай (3.19) является во всех отношениях «хорошим» и по существу аналогичен рассмотренному ранее случаю непрерывной $M(t)$; в обоих вариантах решение дается рядом (3.6) с интегрированием по Р.-С. Возникает естественный вопрос, насколько условие (3.19) отвечает существу дела и нельзя ли корректным способом определить решение для более широкого класса уравнений (3.4).

Общеизвестно, конечно, что интегрирование по Дарбу—Стильтьесу (Д.-С.) или Лебегу—Стильтьесу (Л.-С.) носит более общий характер. Здесь, однако, имеется один существенный момент, связанный со значениями решения в точках разрыва. Если при интегрировании по Р.-С. эти значения не влияют на поведение решения в других точках, то при интегрировании по Д.-С. или Л.-С. они приобретают решающее значение и произвольное доопределение $X(t)$ здесь уже не является оправданным.

3.7. Именно на таком доопределении основан фактически подход Ф. Аткинсона [12]. Внешне он выглядит иначе. Здесь не выделяется случай (3.19), а также не упоминаются интегралы Л.-С. или Д.-С. Вместо этого вводится следующая модификация интеграла Р.-С:

$$\int_a^c dM(s)X(s) = \lim \sum_{i=0}^{r-1} [M(t_{i+1}) - M(t_i)]X(t_i) \ (a = t_0 < \ldots < t_r = c) \tag{3.21}$$

при неограниченном измельчении разбиений $\{t_i\}$. Как отмечается в [12], если $M(t)$ и $X(t)$ непрерывны справа и имеют ограниченную вариацию на $[a, c]$, то такой интеграл (т. е. предел, не зависящий от последовательности разбиений) существует. Решением уравнения (3.5) Аткинсон называет непрерывную справа матрицу-функцию $X(t)$, удовлетворяющую при всех t равенству (3.5) с интегралом в смысле (3.21)[1]. Устанавливается, что подобное решение существует, единственно и может быть получено методом последовательных приближений. Последнее эквивалентно представлению решения сходящимся рядом (3.6), где интегралы понимаются в смысле (3.21).

Далее в [12] отмечается, что вместо (3.21) могло быть использовано и несколько иное определение интеграла с помощью равенства

$$\int_a^c dM(s)X(s) = \lim \sum_{i=0}^{r-1} [M(t_{i+1}) - M(t_i)]X(t_{i+1}). \tag{3.22}$$

Это приводит, вообще говоря, к другому решению уравнения (3.5); такое решение может иногда и не существовать, что обеспечивает предпочтительность определения (3.21). Аткинсон выясняет, что оба определения совпадают, если скачки $M(t)$

[1]В [12] используется не матричная, а векторная запись решений, что для рассматриваемого вопроса не имеет значения.

удовлетворяют условию

$$[M(t) - M(t-0)]^2 \equiv 0. \tag{3.23}$$

Случай (3.23) оказывается здесь, таким образом, «хорошим», что подкрепляется далее (см. [12, с. 417, 418]) соображениями инвариантности лагранжиана для решений самосопряженых уравнений.

Легко видеть, что интегралы, понимаемые в смысле (3.21), (3.22), не отличаются по существу от интегралов Л.-С. (для рассматриваемых классов матриц-функций). Следует лишь в варианте (3.21) переопределить значения $M(t)$, $X(t)$ в точках разрыва по непрерывности слева.

Условие (3.23) имеет определенное сходство с (3.19), но является менее ограничительным. К поставленному выше вопросу о том, насколько существенно (3.19), добавляется, таким образом, аналогичный вопрос относительно (3.23).

В [12] неоднократно подчеркивается, что основной целью монографии является вскрытие тесных связей между краевыми задачами для непрерывного случая (т. е. для классических уравнений) и дискретного случая (т. е. для уравнений с коэффициентами типа дельта-функций и аналогичных им конечноразностных уравнений). Естественно ожидать поэтому, что понятие решения должно быть в каком-то смысле корректно относительно «дельтаобразной» аппроксимации.

Рассмотрим с этой точки зрения один простой, но показательный пример — скалярное уравнение

$$\dot{x} + \delta(t)x = 0, \quad x(-1) = 1 \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1), \tag{3.24}$$

которое можно формально переписать также в виде интегрального уравнения

$$x(t) = 1 + \int_{-1}^{t} x(s)\,dm(s), \quad \text{где} \quad m(t) = \begin{cases} 0 & (-1 \leqslant t < 0) \\ 1 & (0 \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

Очевидно $x(t) \equiv 1$ при $t < 0$. Чему равно $x(t)$ при $t > 0$?

Рассмотрим различные интерпретации. Так как условие (3.19) здесь не выполняется, то подход с точки зрения интегрирования по Р.-С. неприменим. Решение по Аткинсону (в основном варианте) имеет вид

$$x(t) \equiv 0 \quad (t > 0)$$

довольно-таки странный, поскольку речь идет о нетривиальном решении. Так как (3.23) не имеет места, вариант (3.22) дает другой ответ

$$x(t) \equiv 0.5 \quad (t > 0).$$

В то же время очевидно, что при аппроксимации $\delta(t)$ непрерывными «дельтаобразными» коэффициентами с последующим предельным переходом мы получим

$$x(t) \equiv e^{-1} \quad (t > 0),$$

что и является, с нашей точки зрения, наиболее разумным вариантом, соответствующим, так сказать, «физическому смыслу» дельта-функции.

3.8. Переходим к точным формулировкам. Для этого следует прежде всего определить, что такое «дельтаобразная аппроксимация». Вопрос этот не столь прост, как может показаться на первый взгляд; стандартные схемы здесь не годятся. Как и ранее, будет удобнее говорить не о матрице коэффициентов, а о первообразной матрице $M(t) = \|m_{ij}(t)\|_1^n$, фигурирующей в (3.4), (3.5) (собственно, в аппроксимации $M(t)$ уже нет ничего «дельтаобразного»; этот термин относится, конечно, к аппроксимации $M(t)$).

Пусть $M(t)$ — произвольная матрица-функция ограниченной вариации на $[a,b]$ (вообще говоря, разрывная) и $\{M_k(t)\}$ — последовательность непрерывных матриц-функций ограниченной вариации. Нас интересует вопрос, когда из той или иной сходимости $M_k(t)$ к $M(t)$ вытекает та или иная сходимость решений уравнений

$$X_k(t) = I + \int_a^t dM_k(s)X(s), \quad k = 1,2,\ldots \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{3.25}$$

к некоторой матрице-функции $X(t)$. Последнюю в этом случае было бы целесообразно принять за решение уравнения (3.4).

Поскольку $M(t)$ разрывна, а $M_k(t)$ непрерывны, то равномерная сходимость M_k к M заведомо не годится. Таким образом, теоремы о предельном переходе, полученные в § 2, не могут быть непосредственно использованы в данном случае. Дело здесь не в том, что рассмотрения § 2 охватывают лишь абсолютно непрерывные матрицы-функции («стильтьесование» формулировок § 2 представляет собой несложную техническую задачу), а в том, что основной упор в § 2 был сделан именно на равномерную сходимость первообразных.

Потребуем, чтобы M_k сходилась к M точечно:

$$M_k(t) \to M(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \quad (k \to \infty). \tag{3.26}$$

Другим возможным вариантом является менее жесткое требование на $M_k(t) = \|m_{ij}^k(t)\|_1^n$: при всех i, j $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$

$$m_{ij}^k(t) \to m_{ij}(t) \quad (t \in [a,b] \setminus \Omega m_{ij}) \quad (k \to \infty). \tag{3.27}$$

Оба варианта имеют свои преимущества. Мы в дальнейшем сосредоточимся, в основном, на (3.26).

Само по себе (3.26) не обеспечивает какого-либо сближения решений (за исключением скалярного случая $n = 1$). Любопытно, что *стандартное дополнительное условие* (3.8) *равномерной ограниченности вариаций M_k в данном случае также не обеспечивает сходимости решений*. Для иллюстрации положим

$$M_k(t) = \begin{pmatrix} (1-|kt-3|)_+ & 0 \\ (1-|kt-2|)_+ & 0 \end{pmatrix} \quad k = 1,2,\ldots \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

здесь, как и в (3.17), $r_+(t) = \max\{0, r(t)\}$. Уравнения (3.25) эквивалентны в данном случае легко решаемым системам

$$\dot y_k = p_k(t)y_k, \quad \dot z_k = q_k(t)z_k, \quad k = 1,2,\ldots \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{3.28}$$

с кусочно-постоянными p_k, q_k. Фундаментальная матрица $X_k(t)$, соответствующая системе (3.28) при начальном условии $X_k(0) = I$ имеет на $[4k^{-1}, 1]$ вид

$$X_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2-e & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{4}{k} \leqslant t \leqslant 1\right), \quad k = 1,2,\ldots$$

Итак, несмотря на то что при всех $t \in [0,1]$ $M_k(t)$ стремятся к нулю (кстати, в данном примере это относится и к самим коэффициентам, а не только к первообразным от них) и на равномерную ограниченность вариаций $M_k(t)$, решения уравнений (3.25) ни в каком смысле (точечная сходимость, интегральная, по мере и т. п.) не приближаются к решению уравнения

$$\dot{X} = 0, \quad X(0) = I. \tag{3.29}$$

В данном конкретном случае $X_k(t)$ имеют точечный предел, но рассматривать его в качестве обобщенного решения (3.29) было бы, конечно, абсурдом; видоизменяя пример, нетрудно добиться, чтобы $X_k(t)$ при тех же условиях на $M_k(t)$ сходились к другому пределу или вообще не сходились. Итак, присоединение к (3.26) дополнительного условия (3.8) ничего не дает. Для того чтобы исправить положение, заменим (3.8) более сильным требованием

$$V_a^b m_{ij}^k \to V_a^b m_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n \quad (k \to \infty). \tag{3.30}$$

Это существенно новое условие, в котором до сих пор не было необходимости; вместо (3.30) можно было бы довольствоваться ограничением

$$\varlimsup_{k\to\infty} V_a^b m_{ij}^k \leqslant V_a^b m_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{3.31}$$

которое ввиду (3.26) эквивалентно (3.30).

Аппроксимация $M(t)$ ($V_a^b M < \infty$) *непрерывными* $M_k(t)$ *с выполнением условий* (3.26) *и* (3.30) *всегда возможна*. Покажем это.

Из вида соотношений (3.26), (3.30) явствует, что достаточно аппроксимировать каждый элемент $m_{ij}(t) = m(t)$ в отдельности. Далее предполагается, что $m(t)$ продолжен за промежуток $[a,b]$ следующим образом:

$$m(t) \equiv m(a) \quad (t < a); \quad m(t) \equiv m(b) \quad (t > b).$$

Кроме того, будет удобнее изменить параметризацию и говорить не о $k \to \infty$, а об $\varepsilon \downarrow 0$. Итак, требуется функцию $m(t)$ ограниченной вариации на $[a,b]$ аппроксимировать непрерывными $m_\varepsilon(t)$, так, чтобы

$$m_\varepsilon(t) \to m(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \quad (\varepsilon \downarrow 0), \tag{3.32}$$

$$V_a^b m_\varepsilon \to V_a^b m \quad (\varepsilon \downarrow 0). \tag{3.33}$$

Пусть вначале $m(t)$ непрерывна справа. Положим

$$m_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} m(s)\,ds \quad (a \leqslant t \leqslant b; \quad \varepsilon > 0).$$

Выполнение (3.32) очевидно. Так как $m_\varepsilon(t)$ абсолютно непрерывны, то

$$\begin{aligned} V_a^b m_\varepsilon &= \int_a^b |\dot{m}_\varepsilon(t)|\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b |m(t+\varepsilon) - m(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b V_t^{t+\varepsilon} m\,dt = \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b V_a^{t+\varepsilon} m\,dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_a^b V_a^t m\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_b^{b+\varepsilon} V_a^t m\,dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} V_a^t m\,dt = \\ &= V_a^b m - \frac{1}{\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon} V_a^t m\,dt \leqslant V_a^b m. \end{aligned}$$

Ввиду (3.32) отсюда следует (3.33).

Если $m(t)$ непрерывна слева, аналогично ведут себя функции

$$m_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t} m(s)\,ds \quad (a \leqslant t \leqslant b; \quad \varepsilon > 0).$$

Переходим к общему случаю. Произвольную функцию ограниченной вариации на $[a,b]$ можно представить в виде

$$m(t) = m^*(t) + m^{**}(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

где $m^*(t)$ непрерывна справа, $m^{**}(t)$ — слева и, кроме того,

$$V_a^b m = V_a^b m^* + V_a^b m^{**}.$$

В самом деле, достаточно, например, положить

$$m^*(t) = \sum_{a<t_i\leqslant t} [m(t_i) - m(t_i - 0)], \quad m^{**}(t) = m(t) - m^*(t),$$

где $\{t_i\}$ — совокупность точек разрыва $m(t)$.

Аппроксимируя отдельно m^* и m^{**}, как это делалось выше, приходим к функциям

$$m_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\Big[\int_t^{t+\varepsilon} m^*(s)\,ds + \int_{t-\varepsilon}^{t} m^{**}(s)\,ds\Big] \quad (a \leqslant t \leqslant b;\ \varepsilon > 0). \tag{3.34}$$

Условие (3.32), очевидно, выполняется. Далее,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, V_a^b m_\varepsilon \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} V_a^b\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} m^*(s)\,ds\Big) + \\ + \lim_{\varepsilon\to 0} V_a^b\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t-\varepsilon}^{t} m^{**}(s)\,ds\Big) = V_a^b m^* + V_a^b m^{**} = V_a^b m.$$

Отсюда, согласно (3.32), вытекает и второе условие (3.33).

Итак, в топологии, порожденной сходимостью (3.26), (3.30), множество непрерывных матриц-функций всюду плотно в множестве матриц-функций ограниченной вариации. Вместо непрерывных здесь можно было бы говорить и о гладких матрицах-функциях. Подчеркнем, что речь идет о сходимости, не согласованной с линейными операциями (из сходимости M_k к M не вытекает сходимость $M_k - M$ к нулю).

3.9. Описав «дельтаобразную» аппроксимацию коэффициентов, поясним, как она используется.

Назовем уравнение (3.4) *δ-корректным,* если для любой последовательности непрерывных $M_k(t)$, удовлетворяющей условиям (3.26)—(3.30), решения $x_k(t)$ уравнений (3.25) имеют предел при всех $t \in [a,b]$.

Ясно, что для δ-корректного уравнения этот предел не зависит от выбора конкретной последовательности $\{M_k\}$. Этот предел и возьмем за определение решения δ-корректного уравнения (3.4). Очевидно, что для непрерывной $M(t)$ такой предел — если он существует — не может отличаться от обычного решения, доставляемого рядом (3.6). Поэтому существенное значение имеет вопрос, насколько широк класс δ-корректных уравнений.

Как и ранее, через Ωf обозначается множество точек разрыва $f(t)$ в $[a,b]$. Пусть, далее, $\Omega^+ f$, $\Omega^- f$ суть множества точек разрыва $f(t)$ в $[a,b]$ справа и слева соответственно.

Имеет место следующий критерий δ-корректности.

Теорема 3.1. *Уравнение* (3.4) *δ-корректно в том и только том случае, если элементы матрицы $M(t) = \|m_{ij}(t)\|_1^n$ удовлетворяют условию*

$$\Omega^+ m_{ij} \bigcap \Omega^+ m_{ki} = \Omega^- m_{ij} \bigcap \Omega^- m_{ki} = \varnothing \tag{3.35}$$

для любых трех индексов i, j, k из $[1,n]$, *среди которых хотя бы два различны.*

В частности, для непрерывных справа $M(t)$, о которых шла речь в п. 3.6, 3.7, условие δ-корректности имеет вид

$$\Omega m_{ij} \bigcap \Omega m_{ki} = \varnothing \quad (1 \leqslant i,j,k \leqslant n; |i-j| + |i-k| > 0). \tag{3.36}$$

Разумеется, это же условие относится и к $M(t)$, непрерывным слева. В целом же (3.36), будучи более жестким, чем (3.35), является достаточным, но не необходимым условием δ-корректности. В случае выполнения (3.36) будем говорить о *прочной* δ-корректности; уравнения с $M(t)$, удовлетворяющей условию (3.36), остаются δ-корректными при любом переопределении $M(t)$ в точках разрыва. Уравнения с непрерывными $M(t)$ заведомо являются прочно δ-корректными. Это же относится и к уравнениям с $M(t)$, удовлетворяющими условию (3.19); также и в этом случае оба определения решения (через интегрирование по Р.-С. и через δ-корректность) совпадают. Проверка сводится к несложной технической работе с рядами вида (3.6).

Итак, введенное с помощью предельного перехода понятие решения обобщает решения в смысле Р.-С, поскольку даже для непрерывных справа $M(t)$ условие δ-корректности выполняется для более широкого класса матриц-функций, чем условие (3.19). Ясно, что в этом случае (т. е. для непрерывных справа M) обобщение относится по существу к диагональным элементам $m_{ii}(t)$, которые теперь могут быть разрывными. Возвратимся, в частности, к уравнению (3.20). Тогда как требование (3.19) заключалось в непрерывности $p_1^V(t)$, условие прочной δ-корректности (3.36) сводится к тому, чтобы $p_1^V(t)$ не имела общих точек разрыва ни с одной из функций $p_2^V(t), \ldots, p_{n+1}^V(t)$.

Итак, (3.19) достаточно, но не необходимо для δ-корректности (и даже для прочной δ-корректности). В то же время менее ограничительное условие Ф. Аткинсона (3.23) не является ни необходимым, ни достаточным. Об отсутствии необходимости свидетельствует уравнение (3.24), которое (как и всякое скалярное уравнение $\dot{x} + p(t)x = 0$) прочно δ-корректно, хотя (3.23) здесь не выполнено. С другой стороны, рассмотрим матрицу-функцию второго порядка

$$M(t) = 0 \quad (-1 \leqslant t < 0), \quad M(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{3.37}$$

которой соответствует система уравнений

$$\dot{y} = \dot{z} = \delta(t)y - \delta(t)z \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1); \tag{3.38}$$

здесь выполнено (3.23), но δ-корректность отсутствует. Отметим, что для области применимости условий δ-корректности (3.35) и (3.36) имеет значение форма, в которой задано уравнение. Если уравнение имеет вид (3.5) с определенной всюду $M(t)$, то естественно применять условие (3.35). Это же относится к «коэффициентной» форме, если только входящие в состав коэффициентов компоненты типа дельта-функций имеют вид $c_i\delta(t-t_i+0)$ или $c_i\delta(t-t_i-0)$, поскольку в этом случае $M(t)$ однозначно восстанавливается. Однако при обычно встречающихся компонентах вида $c_i\delta(t-t_i)$ доопределение первообразных в точках разрыва t_i является актом произвола, так что для таких уравнений следует пользоваться условием (3.36). Например, по уравнениям (3.38) нельзя восстановить $M(0)$; поэтому точнее было бы сказать выше, что матрице $M(t)$, определенной равенствами (3.37), соответствует не система (3.38), а система

$$\dot{y} = \dot{z} = \delta(t+0)y - \delta(t+0)z \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1)$$

(здесь δ-корректность отсутствует независимо от значения $M(0)$). Вообще, для коэффициентов с компонентами вида $c_i\delta(t-t_i)$ более целесообразно определение дельтаобразной аппроксимации коэффициентов формулой (3.27) вместо (3.26), поскольку у нас нет значений $M(t)$ в точках разрыва; что касается условия (3.30), то здесь при вычислении $V_a^b m_{ij}$ коэффициент $m_{ij}(t)$ доопределяется для $t \in \Omega m_{ij}$ по непрерывности справа или слева. Разумеется, при этом следует говорить о сходимости решений не всюду на $[a,b]$, а лишь в точках непрерывности $M(t)$; точнее, область сходимости для элемента x_{ik} матрицы $X(t)$ имеет вид

$$[a,b] \backslash \bigcup_{j=1}^{n} \Omega m_{ij}.$$

3.10. Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 3.1, напомним понятие интеграла Дарбу—Стильтьеса (мы придерживаемся терминологии И. Н. Песина [11]; в монографии Э. Х. Гохмана [67] этот интеграл именуется просто интегралом Стильтьеса). Одно из нескольких эквивалентных определений интеграла

$$(\text{Д.-С.}) \int_a^b f(t)\,dg(t) \quad (V_a^b g < \infty) \tag{3.39}$$

состоит в том, что к определению интеграла Р.-С. добавляется требование включения каждой точки разрыва $g(t)$ во все разбиения $[a,b]$, начиная с некоторого. Интеграл Д.-С. шире, чем интеграл Р.-С., и, в отличие от последнего, аддитивен в следующем смысле: если существуют $\int_a^c$, $\int_c^b$ $(a < c < b)$, то существует и $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$. Если обе функции f, g имеют ограниченную вариацию в $[a,b]$ — а мы будем иметь дело только с этим случаем — то для существования интеграла (3.39) необходимо и достаточно, чтобы

$$\Omega^+ f \bigcap \Omega^+ g = \Omega^- f \bigcap \Omega^- g = \varnothing. \tag{3.40}$$

Для непрерывных справа функций интегралы Д.-С. и Р.-С. совпадают (почему в п. 3.6 мы говорили лишь об интегрировании по Р.-С). Поскольку теперь $M(t)$ не предполагается непрерывной справа, естественно распространить сказанное там на уравнения (3.5) с интегралом в смысле Д.-С. Именно, *такое уравнение имеет решение в том и только том случае, если*

$$\Omega^+ m_{ij} \bigcap \Omega^+ m_{ki} = \Omega^- m_{ij} \bigcap \Omega^- m_{ki} = \varnothing \quad \textit{при любых} \quad i, j, k. \tag{3.41}$$

Это решение единственно и дается рядом (3.6) (с интегралами по Д.-С., разумеется). Сказанное вытекает из тех же соображений, которые относились к интегрированию по Р.-С.

Условие (3.41) относится к (3.35) примерно так же, как (3.19) к (3.36): оно накладывает дополнительное требование непрерывности диагональных элементов $m_{ii}(t)$.

3.11. Введем краткую запись "$f_k \circ\!\!\to f$" для сходимости

$$f_k(t) \to f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \quad V_a^b f_k \to V_a^b f \quad (k \to \infty).$$

Нам понадобятся некоторые факты, относящиеся к такой сходимости (которая ввиду своего нелинейного характера, видимо, мало изучена).

1°. *Если $f_k \circ\!\!\to f$, то $V_a^t f_k \circ\!\!\to V_a^t f$.*

2°. *Пусть $f_k \circ\!\!\to f$ и $|f(t_0+0) - f(t_0)| < \varepsilon$ для некоторого $t_0 \in [a, b)$. Тогда найдется $t_1 \in (t_0, b]$ такое, что*

$$|f_k(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k \geqslant k_0(\varepsilon) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Точно так же, если $|f(t_0) - f(t_0 - 0)| < \varepsilon \quad (a < t_0 \leqslant b)$, то найдется отрезок $[t_1, t_0]$, удовлетворяющий аналогичному условию.

3°. *Пусть $p_k \circ\!\!\to p$, $q_k \circ\!\!\to q$, $\Omega^+ p \bigcap \Omega^+ q = \Omega^- p \bigcap \Omega^- q = \varnothing$. При любом $\varepsilon > 0$ существует разложение $[a, b]$ в виде*

$$[a, b] = \Delta_1 \bigcup \Delta_2 \tag{3.42}$$

такое, что:

а) Δ_1, Δ_2 суть конечные системы отрезков, никакие два из которых не имеют общих внутренних точек (так что любой интеграл Д.-С. по $[a, b]$ есть сумма интегралов по Δ_1 и Δ_2);

б) вариация каждой $p_k(t)$ на Δ_1 меньше ε при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$;

в) $|q_k(t) - q(t)| < \varepsilon$ при $t \in \Delta_2, k \geqslant k_0(\varepsilon)$.

Доказательства утверждений 1°—3° достаточно очевидны; в частности, 3° вытекает из 1°, 2° и леммы о конечном покрытии.

4°. *Пусть функция $r(z)$ удовлетворяет условию Липшица в каждом круге. Пусть, далее, $f_k(t)$, $g_k(t)$ непрерывны, $f_k \circ\!\!\to f$, $q_k \circ\!\!\to q$ и выполнено* (3.40). *Тогда*

$$\int_a^b r[f_k(t)]\, dg_k(t) \to (\text{Д.-С.}) \int_a^b r[f(t)]\, dg(t) \quad (k \to \infty). \tag{3.43}$$

В дальнейшем указание на интегрирование по Д.-С. обычно опускается. В силу предположений $V_a^b r[f(t)] < \infty$; кроме того, (3.40), очевидно, сохраняется при замене $f(t)$ на $r[f(t)]$; поэтому интеграл в правой части (3.43) существует. Имеем

$$\int_a^b r[f_k] dg_k - \int_a^b r[f]\, dg = \int_a^b (r[f_k] - r[f])\, dg_k + r[f(t)]\big[g_k(t) - g(t)\big]\Big|_a^b + \\ + \int_a^b (g - g_k)\, dr[f] = I + II + III.$$

Нужно показать, что I и III стремятся к 0 при $k \to \infty$ (для II это очевидно). Ясно, что f_k, g_k равномерно ограничены вместе с вариациями: $f_k(t)$, $g_k(t)$, $V_a^b f_k$, $V_a^b g_k \leqslant c < \infty$ ($a \leqslant t \leqslant b$; $k = 1, 2, \dots$).

Обозначим через m и l соответственно максимум модуля и константу Липшица функции $r(z)$ в круге $|z| \leqslant c$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Пусть Δ_1, Δ_2 определяют фигурирующее в 3° разложение (3.42) для $p_k = g_k$, $q_k = f_k$ (и, разумеется, $p = g$, $q = f$). Тогда при $k \geqslant k_0(\varepsilon)$

$$|I| \leqslant \int\limits_{\Delta_1} \big|r[f_k] - r[f]\big|\,|dg_k| + \int\limits_{\Delta_2} \big|r[f_k] - r[f]\big|\,|dg_k| \leqslant 2m\varepsilon + l\varepsilon.$$

Для оценки III возьмем разложение (3.42) для $p_k = f_k$, $q_k = g_k$. Так как $V_a^b r[f] \leqslant$ $\leqslant l V_a^b f$, то при больших k

$$|III| \leqslant \int\limits_{\Delta_1} \big|g - g_k\big| |dr[f]| + \int\limits_{\Delta_2} \big|g - g_k\big| |dr[f]| \leqslant 2cl\varepsilon + cl\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε 4° доказано. Отметим, между прочим, что из предпосылок 4° не вытекает соотношение $r[f_k(t)] \circ\!\!\to r[f(t)]$.

Предшествующее имело своей целью следующий факт.

5°. *В условиях* 4°

$$\int_a^t r[f_k(t)]\,dg_k(t) \circ\!\!\to \text{(Д.-С.)} \int_a^t r[f(t)]\,dg(t).$$

Точечная сходимость вытекает из 4°, поскольку $[a,b]$ можно без ограничения общности (ввиду 1°) заменить на $[a,t]$. Итак, нужно проверить лишь сходимость вариаций

$$\int_a^b \big|r[f_k(t)]\big|\,|dg_k(t)| \to \int_a^b \big|r[f(t)]\big|\,|dg(t)|,$$

но и это соотношение выводится из 4° с помощью переобозначений:

$$\tilde r(z) = |r(z)|,\ \tilde g_k(t) = V_a^t g_k,\ \tilde g(t) = V_a^t g \quad (\tilde g_k \circ\!\!\to \tilde g \quad \text{в силу } 1^\circ).$$

3.12. Переходим непосредственно к доказательству теоремы 3.1. Пусть выполнено (3.35) и непрерывные $M_k(t) \circ\!\!\to M_0(t) = M(t)$, т. е. имеют место соотношения (3.26), (3.30). Покажем, что тогда решения $X_k(t)$ уравнений (3.25) сходятся при любом $t \in [a,b]$.

Не ограничивая общности, можно считать, что M_k (а следовательно, и X_k непрерывно дифференцируемы в $[a,b]$ ($k = 1, 2, \dots$)). Действительно, при любом $k \geqslant 1$

$$M_k^\varepsilon(t) \overset{Df}{=} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^t M_k(s)\,ds \in C^1[a,b] \quad (M_k(t) \equiv 0 \text{ при } t \leqslant a),$$

$$M_k^\varepsilon \rightrightarrows M_k,\ M_k^\varepsilon \circ\!\!\to M_k \quad (\varepsilon \downarrow 0);$$

поэтому (см. п. 3.3) для решений соответствующих уравнений имеем $X_k^\varepsilon \Rightarrow X_k$ ($\varepsilon \downarrow 0$). Таким образом, если последовательность $\{X_k(t)\}$ не сходится при $k \to \infty$ в какой-либо точке из $[a,b]$, то это же будет иметь место и для $\{X_k^\varepsilon(t)\}$ при достаточно быстро убывающих ε_k.

Итак, уравнения (3.25) можно записать в виде

$$\dot{X}_k = \dot{M}_k(t)X_k, \quad X_k(a) = I, \quad k = 1,2,\ldots \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{3.44}$$

с обычными производными. Введем диагональные матрицы-функции

$$D_k(t) = \begin{pmatrix} e^{m_{11}^k(t)} & & 0 \\ & e^{m_{22}^k(t)} & \\ 0 & & \ddots \; e^{m_{nn}^k(t)} \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,\ldots$$

и произведем в (3.44) замену

$$X_k = D_k(t)Y_k, \quad k = 1,2,\ldots \tag{3.45}$$

Тогда уравнения (3.44) перейдут в уравнения

$$\dot{Y}_k = \dot{Q}_k(t)Y_k, \quad Y_k(a) = I, \quad k = 1,2,\ldots \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{3.46}$$

где элементы матриц $Q_k(t) = \|q_{ij}^k(t)\|_1^n$, как легко подсчитать, имеют вид:

$$q_{ii}^k(t) \equiv 0,\ q_{ij}^k(t) = \int_a^t e^{m_{jj}^k(\tau) - m_{ii}^k(\tau)}\, dm_{ij}^k(\tau) \text{ при } i \neq j\ (1 \leqslant i,j \leqslant n). \tag{3.47}$$

Определим $Q_0(t) = \|q_{ij}^0(t)\|_1^n$ теми же соотношениями (3.47) с $k = 0$. Поскольку $m_{ij}^k \circ\!\!\to m_{ij}^0$, то

$$Q_k(t) \circ\!\!\to Q_0(t). \tag{3.48}$$

Это вытекает из предложения 5° предыдущего пункта. Правда, соотношение $m_{ii}^k - m_{jj}^k \circ\!\!\to m_{ii}^0 - m_{jj}^0$, вообще говоря, не выполняется, но так как

$$q_{ij}^k(t) = \int_a^t e^{m_{jj}^k}(\tau)\, d\Big[\int_a^\tau e^{-m_{ii}^k(s)} dm_{ij}(s)\Big] \quad (i \neq j),$$

то дело сводится к двукратному применению 5° (с $r(z) = e^{\pm z}$).

Решения уравнений (3.46) имеют вид

$$Y_k(t) = I + Q_k(t) + \int_a^t dQ_k(t_1)Q_k(t_1) + \int_a^t dQ_k(t_1)\int_a^{t_1} dQ_k(t_2)Q_k(t_2) + \ldots. \tag{3.49}$$

Мы пишем dQ_k вместо $\dot{Q}_k dt$, так как намереваемся рассмотреть и $Y_0(t)$, определенную той же формулой (3.49). Последняя сохраняет смысл и при $k = 0$. Действительно, ввиду (3.47) q_{ii}^0 непрерывны, а q_{ij}^0 при $i \neq j$ имеют те же точки разрывов справа и слева, что и m_{ij}^0 $(= m_{ij})$; отсюда, в силу (3.35), вытекает выполнение для Q_0 условия вида (3.41) (с заменой m_{ij} на q_{ij}^0). Поэтому, согласно п. 3.10, все интегралы, входящие в ряд (3.49) при $k = 0$, существуют в смысле Д.-С, а сам ряд представляет решение уравнения

$$Y_0(t) = I + (\text{Д.-С.}) \int_a^t dQ_0(s)Y_0(s),$$

что, впрочем, для нас сейчас несущественно.

Покажем теперь, что

$$Y_k(t) \to Y_0(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.50}$$

Ввиду (3.48) вариации $Q_k(t)$ ограничены в совокупности некоторой константой c, поэтому члены ряда (3.49) равномерно по t мажорируются соответствующими членами ряда $e^c = 1 + c + c^2/2 + \ldots$ (напомним, что $Q_k(0) = 0$). Таким образом, чтобы установить (3.50), достаточно проверить почленную сходимость рядов. Соотношение

$$\int_a^t dQ_k(t_1)Q_k(t_1) \circ\!\!\to \int_a^t dQ_0(t_1)Q_0(t_1) \tag{3.51}$$

получается из (3.48) применением замечания 5° предыдущего пункта к элементам входящих в (3.51) матриц-функций; повторное применение 5° приводит к аналогичным соотношениям для последующих членов рядов (3.49). Это доказывает (3.50).

Так как, очевидно, $D_k(t) \to D_0(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, то из (3.45), (3.50) заключаем, что

$$X_k(t) \to D_0(t)Y_0(t) \text{ при всех } t \in [a, b] \quad (k \to \infty),$$

что и требовалось. Таким образом, мы не только установили существование предела, но и записали его в «явном» виде — как произведение $D_0(t)$ на ряд (3.49) при $k = 0$ (с интегралами Д.-С).

Для завершения доказательства теоремы 3.1 осталось проверить необходимость условия (3.35), что сводится к очевидной «перестановке порядка импульсов». Небольшая тонкость имеется лишь в связи с тем, что скачки $m_{ii}(t)$ могут оказаться равными $2\pi il$, где $l \neq 0$ — целое; в этом случае они должны быть предварительно представлены в виде $2\pi il' + 2\pi il''$, где l', l'' — нецелые положительные числа, $l' + l'' = l$.

3.13. Мы рассмотрели вопрос об аппроксимации разрывных $M(t)$ непрерывными. В общей теории предельного перехода для обобщенных уравнений это один из частных случаев, важный в теоретическом отношении ввиду своей связи с определением решения. Другим интересным случаем является, наоборот, аппроксимация непрерывных $M(t)$ разрывными и, в первую очередь, кусочно-постоянными. Такая аппроксимация важна для вычислительных аспектов. Изучение ее в определенном смысле проще, поскольку здесь легко обеспечить равномерную сходимость первообразных. Выбор того или иного определения решения здесь теряет актуальность, так как в пределе все скачки аннулируются. Подробнее на этом не останавливаемся.

Итак, для δ-корректных уравнений решение можно определить на основе предельного перехода. Что касается δ-некорректных уравнений, то здесь каждая точка разрыва, нарушающая условие δ-корректности (3.35), порождает «воронку» решений, предельных при том или ином способе аппроксимации (3.26)—(3.30). Тем не менее можно дать общее определение решения, не связанное с какими-либо специальными свойствами $M(t)$, кроме ограниченности вариации; для этого следует выделить из воронки решения, естественные с какой-то точки зрения. Примем, что скачки $M(t)$ действуют на $X(t)$ следующим образом:

$$X(t) \equiv e^{M(t)-M(t-0)}X(t-0), \quad X(t+0) \equiv e^{M(t+0)-M(t)}X(t). \tag{3.52}$$

Смысл этого предположения состоит, приблизительно говоря, в том, что импульсные компоненты коэффициентов, расположенные в бесконечно малой полуокрестности какой-либо точки, рассматриваются как «порожденные одним и тем же импульсом». В частности, именно к таким решениям приводит в пределе аппроксимация элементов $m_{ij}(t) = m(t)$ по формуле (3.34), если брать общее ε для всех коэффициентов. К решениям типа (3.52) можно прийти с помощью замены переменной

$$\tau = \tau(t) = \sum_{i,j=1}^{n} V_a^t m_{ij}, \tag{3.53}$$

если на всех отрезках $[\tau(t_i - 0), \tau(t_i)], [\tau(t_i), \tau(t_i + 0)]$, в которые «растягиваются» точки t_i разрыва $M(t)$, считать функции $m_{ij}(\tau)$ линейными (т. е. соответствующие коэффициенты — постоянными).

Аналитически решения, удовлетворяющие условию (3.52), можно записать в виде *мультипликативного интеграла Д.-С.*

$$X(t) = \int_a^t e^{dM(s)} \overset{Df}{=} \lim \prod_{t=0}^{r-1} e^{M(t_{i+1})-M(t_i)} \quad (a = t_0 < \cdots < t_r = t) \tag{3.54}$$

(порядок сомножителей — естественный), где предел берется по неограниченно измельчающимся разбиениям $\{t_i\}$, подчиненным дополнительному условию: каждая точка разрыва $M(t)$ входит во все разбиения, начиная с некоторого. Это условие не нужно, если $M(t)$ непрерывна справа (или слева); для таких $M(t)$ решение (3.54) приобретает особенно простой вид (см. также работу А. Д. Мышкиса и А. М. Самойленко [68]).

Близкое понятие мультипликативного интеграла Стильтьеса было введено ранее В. П. Потаповым [13], хотя и не вполне корректно. Без каких-либо оговорок о точках разрыва в [13] утверждается, что предел (3.54) существует при произвольных измельчающихся разбиениях (и не зависит от них) для любой матрицы-функции $M(t)$ ограниченной вариации (в определении В. П. Потапова фигурирует еще непрерывный множитель $f(t)$, который в нашем случае равен 1). Что это не так, показывает пример

$$M(t) = 0 \ (0 \leqslant t < 1), \quad M(1) = C_1, \quad M(t) = C_1 + C_2 \ (1 < t \leqslant 2).$$

Если 1 входит в разбиение $\{t_i\}$, произведение равно $e^{C_1}e^{C_2}$, в противном случае оно равно $e^{C_1+C_2}$. Таким образом, если не довольствоваться скалярным случаем, определение, данное в [13], нуждается в уточнении (можно, например, потребовать, чтобы все точки разрыва были односторонними). Отметим, что данная погрешность не влияет на остальные результаты фундаментальной монографии В. П. Потапова, относящиеся к случаю непрерывной $M(t)$.

Для δ-корректных уравнений решение (3.54) совпадает с тем, которое определенно выше через предельный переход; это является серьезным преимуществом по сравнению с обоими вариантами решения по Аткинсону (для непрерывных справа $M(t)$, см. п. 3.7). Если же уравнение δ-некорректно, то решение (3.54), как уже говорилось, заведомо является одной из предельных матриц-функций при аппроксимации (3.26)— (3.30) — опять-таки в отличие от решений, введенных в [12]. Далее, решение (3.54) всегда существует, в отличие от решения в смысле (3.22), и, кроме того, является невырожденной при всех $t \in [a, b]$ матрицей-функцией, в отличие от решений в смысле (3.21). Наконец, существенная для тематики [12] инвариантность лагранжиана в самосопряженном случае заведомо имеет место для решений (3.54), независимо от выполнения (3.23). Кстати, подлинный смысл последнего условия состоит как раз в том, что в случае (3.23) решения по Аткинсону совпадают с решением (3.54). Поэтому если с самого начала вместо определений Аткинсона пользоваться определением (3.54), то дополнительное ограничение (3.23) становится совершенно излишним (для δ-корректности, как уже говорилось, оно не является ни необходимым, ни достаточным).

Существование предела (3.54), равно как и упомянутые свойства такого решения, проверяются, например, при помощи замены (3.53) с указанным способом доопределения $m_{ij}(\tau)$.

3.14. Можно было бы предположить, что все возникающие в приложениях обобщенные уравнения являются δ-корректными; к сожалению, это не так. Рассмотрим один иллюстрирующий пример.

Во многих вопросах (см. главу три) интересны условия, при которых каждое нетривиальное решение уравнения с вещественными коэффициентами

$$Lx \equiv \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (-a \leqslant t \leqslant a) \tag{3.55}$$

имеет не более одного нуля в $[-a, a]$. В этом случае говорят о неосцилляции решений (3.55) в $[-a, a]$, которую будем кратко записывать в виде $L \in T_0[-a, a]$. Для приложений удобны признаки неосцилляции, состоящие в ограничениях на нормы $p(t)$, $q(t)$ в тех или иных функциональных пространствах; ввиду теоремы Штурма можно применять оценки для $q_+(t)$ вместо $q(t)$. Для норм в $C[-a, a]$ соответствующий точный результат был получен Г. Эфезером [69] и впоследствии передоказывался многими авторами[1]. Смысл этого результата состоит в том, что при условиях $|p(t)| \leqslant a$, $q(t) \leqslant \beta$ критическими являются коэффициенты $p(t) = -\alpha \operatorname{sign} t$, $q(t) \equiv \beta$ (соответствующее явное условие неосцилляции в терминах α, β легко выписать). Не меньший интерес представляют нормы в $L_1[-a, a]$, для которых точный результат [70] таков: *необходимым и достаточным условием импликации*

$$\left\{ \int_{-a}^{a} |p(t)| dt \leqslant \alpha, \int_{-a}^{a} q_+(t) dt \leqslant \beta \right\} \to L \in T_0[-a, a]$$

является неравенство $e^{\alpha/2}\beta \leqslant 2/\alpha$. Для нас сейчас интересна лишь необходимость этого условия. Критическое уравнение здесь оказывается δ-некорректным: соответствующие первообразные имеют вид

$$p^V(t) = \frac{\alpha}{2}(1 - |\operatorname{sign} t|), \quad q^V(t) = \frac{\beta}{2}(1 + |\operatorname{sign} t|). \tag{3.56}$$

Критическое решение определяется условием $\dot{x}(0) = 0$ $(x(0) \neq 0)$, но выражения (3.56) еще не позволяют определить поведение этого решения (как и других) ввиду δ-некорректности. В данном случае ясность может быть внесена следующей записью, устанавливающей «очередность» импульсов:

$$p(t) = \frac{\alpha}{2}\delta(t + 0 + 0) - \frac{\alpha}{2}\delta(t - 0 - 0), \quad q(t) = \frac{\beta}{2}\delta(t + 0) + \frac{\beta}{2}\delta(t - 0).$$

Если поменять порядок импульсов или рассматривать их как «одновременные», понимая решение в смысле (3.54), расстояния между нулями решений окажутся совсем иными и не будут доставлять искомого минимума.

[1]В частности, он послужил темой одного из сообщений на Конгрессе 1966 г.

3.15. В заключение вернемся ненадолго к уравнениям n-го порядка, причем ограничимся уравнениями без члена с $x^{(n-1)}$:

$$x^{(n)} + \dot{r}_1(t)x^{(n-2)} + \cdots + \dot{r}_{n-1}(t)x + \dot{r}_n(t) = 0 \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.57}$$

В п. 3.4 был рассмотрен (для уравнения более общего вида) случай непрерывных $r_i(t)$, а развитая выше теория матричных обобщенных уравнений охватывает $r_i(t)$ ограниченной вариации; оба эти варианта являются независимыми расширениями класса абсолютно непрерывных $r_i(t)$. Специфика уравнения (3.57) позволяет, однако, пойти существенно дальше, ограничившись лишь предположением

$$r_i(t) \in L_2[a,b], \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.58}$$

В точке $t = a$ функции r_i будем считать определенными, т. е. по существу рассматривается пополнение $C[a,b]$ по норме

$$\|f\| = |f(a)| + \Big(\int_a^b |f(t)|^2 dt \Big)^{1/2}.$$

Рассмотрим наряду с (3.57) произвольную последовательность уравнений

$$x_k^{(n)} + \dot{r}_{1,k}(t)x_k^{(n-2)} + \cdots + \dot{r}_{n-1,k}(t)x_k + \dot{r}_{n,k}(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.59}$$

с абсолютно непрерывными $r_{i,k}(t)$ такими, что

$$r_{i,k}(t) \to r_i(t) \text{ в } L_2[a,b], \;\; r_{i,k}(t_0) \to r_i(t_0), \;\; i = 1, 2, \ldots, n \;\; (k \to \infty) \tag{3.60}$$

(предполагается, что функции $r_1, \ldots, r_n$ определены и конечны в точке t_0). Зададимся какими-либо начальными условиями

$$x_k^{(i)}(t_0) = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Оказывается, *из* (3.60) *вытекает сходимость $x_k(t)$ в $W_2^{n-1}[a,b]$, причем предельная функция $x(t)$ не зависит от выбора последовательности* (3.59). Эта функция $x(t)$ ($\in W_2^{n-1}[a,b]$) и принимается за решение (3.57) при начальных условиях $x^{(i)}(t_0) = c_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. В случаях $r_i \in C[a,b]$ или $V_a^b r_i < \infty$ ($i = 1, \ldots, n$) $x(t)$, разумеется, совпадает с решениями в прежнем смысле.

Доказательство сходимости $x_k(t)$ может быть проведено с общих матричных позиций, на основе примерно тех же преобразований, которые применялись в § 2. Существенное значение при этом приобретает не использованный в § 2 «резерв», состоящий в том, что постоянная матрица B, определенная, как в (1.14), не только суммируема, но и ограничена на $[a,b]$. Более специфический путь таков: уравнения (3.59) почленно интегрируются по частям; $x_k^{(i)}(t), i = 0, 1, \ldots, n-2$, выражаются через $x_k^{(n-1)}(t)$ и $x_k(t_0), \ldots, x_k^{(n-2)}(t_0)$; затем исследуются полученные для $y_k = x_k^{(n-1)}$ уравнения в $L_2[a,b]$.

Сказанное выше остается в силе, если L_2, W_2^{n-1} заменить на L_p, W_p^{n-1} с $p \geqslant 2$. Интересно, что значение $p = 2$ является критическим: как показывают примеры, сходимость первообразных в L_p при любом $p < 2$ может иметь место без того, чтобы решения сходились в $W_p^{n-1}[a,b]$ (или хотя бы в $C[a,b]$).

Еще дальше можно пойти, если отсутствует и член с $x^{(n-2)}$. Вообще, в связи с обобщенными уравнениями возникает ряд интересных вопросов (строение «воронки» в δ-некорректном случае и т. п.), обстоятельное рассмотрение которых потребовало бы, пожалуй, отдельной монографии.

§ 4. Приложение к вопросам устойчивости для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$

4.1. Упоминавшиеся в § 3 приложения уравнений второго порядка с обобщенными (импульсными) коэффициентами носили, так сказать, негативный характер и сводились к иллюстрации количественной неулучшаемости того или иного признака устойчивости или неосцилляции. В настоящем параграфе такие уравнения будут выступать в весьма «позитивной» роли, которая в конечном счете опять-таки связана с экстремальными свойствами импульсных коэффициентов.

Сам по себе рассматриваемый вопрос носит вполне классический характер и состоит в исследовании эффективных условий устойчивости при $t \to \infty$, что в данном случае эквивалентно ограниченности (вместе с первыми производными) на числовой оси решений уравнения

$$\ddot{x} + q(t)x = 0 \quad (-\infty < t < \infty). \tag{4.1}$$

Предполагается, что $q(t)$ ($\not\equiv 0$) вещественна, ω-периодична, суммируема на $[0, \omega]$ и, кроме того, неотрицательна в среднем:

$$\int\limits_0^\omega q(t)dt \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Мы уже касались вскользь этого уравнения в п. 5 предшествующего параграфа; здесь оно будет рассмотрено более обстоятельно.

Основополагающие результаты, большая часть которых относится к случаю $q(t) \geqslant 0$, установлены А. М. Ляпуновым в его знаменитой работе [14]. Он выяснил, что существенную роль для вопросов устойчивости имеет величина $x_1(\omega) + \dot{x}_2(\omega)$, где $x_i(t)$ — решения (4.1) такие, что

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1. \tag{4.3}$$

Эта роль состоит, как известно, в том, что неравенства

$$|x_1(\omega) + \dot{x}_2(\omega)| < 2, \quad |x_1(\omega) + \dot{x}_2(\omega)| > 2$$

влекут за собой соответственно устойчивость и неустойчивость решений (4.1) (случай равенства является особым). Ляпунов построил сходящийся ряд

$$x_1(t) + \dot{x}_2(t) = 2 - r_1(t) + r_2(t) - r_3(t) + \ldots \; (-\infty < t < \infty), \tag{4.4}$$

где все $r_i(t) \geqslant 0$ при $q(t) \geqslant 0$. В частности,

$$r_1(t) = t \int\limits_0^t q(s)\, ds;$$

дальнейшие члены ряда содержат кратные интегралы и трудоемкость их вычисления быстро возрастает, особенно если интегралы не берутся в квадратурах. В связи с этим Ляпунов исследовал отношения между членами ряда (4.4) и показал, что

$$\frac{r_n(t)}{r_{n-1}(t)} = \frac{t}{2n} \int\limits_0^t q(s)\, ds, \quad n = 2, 3, \ldots \quad (q(t) \geqslant 0). \tag{4.5}$$

Это и подобные ему неравенства позволяют в ряде случаев оценивать сумму ряда (4.4) с помощью нескольких первых членов. В частности, из (4.4), (4.5) немедленно следует импликация

$$\left\{t\int\limits_0^t q(s)\,ds \leqslant \sigma\right\} \to \left\{x_1(t)+\dot{x}_2(t) \geqslant 2 - t\int\limits_0^t q(s)\,ds\right\}, \tag{4.6}$$

а также общеизвестное достаточное условие устойчивости

$$\int\limits_0^\omega q(t)dt \leqslant \frac{4}{\omega} \quad (q(t) \geqslant 0). \tag{4.7}$$

Оперируя рядом (4.4), Ляпунов в своей работе не использовал связь между устойчивостью решений (4.1) и расстояниями между нулями нетривиальных решений. На эту связь, имеющую существенное значение для дальнейшего, впервые обратил внимание Н. Е. Жуковский [19]. Он заметил, что можно отвлечься от ряда (4.4) и интерпретировать (4.7) совсем с другой точки зрения, а именно как признак неосцилляции для (4.1) на любом отрезке длины ω, т. е. как достаточное условие того, что

расстояние между любыми соседними нулями
всякого нетривиального решения уравнения (4.8)
(4.1) больше ω.

Такой подход позволил Жуковскому указать аналог (4.7) (для $q(t) \geqslant 0$)

$$q(t) \leqslant \frac{\pi^2}{\omega^2} \quad (0 \leqslant t \leqslant \omega). \tag{4.9}$$

Выяснилось также [19], что (4.8) может быть заменено менее ограничительным требованием:

расстояние между любыми двумя нулями
всякого нетривиального решения уравнения (4.10)
(4.1) отлично от ω.

Это приводит к указанной Жуковским серии достаточных условий устойчивости, содержащей (4.9) как частный случай:

$$\frac{n^2\pi^2}{\omega^2} \leqslant q(t) \leqslant \frac{(n+1)^2\pi^2}{\omega^2} \quad \text{при некотором целом } n \geqslant 0 \ (0 \leqslant t \leqslant \omega). \tag{4.11}$$

В терминах зон устойчивости условие (4.8) определяет нулевую зону устойчивости (точнее, ее внутренность), а (4.10) — произвольную. Эта терминология применяется обычно для уравнения, записанного в форме (4.13), т. е. с вещественным параметром λ перед коэффициентом, но мы будем иногда использовать ее и применительно к (4.1), имея в виду, естественно, зону для $\lambda = 1$. Основное внимание в дальнейшем уделяется нулевой зоне устойчивости.

Позднее ряд авторов исследовал случай знакопеременной $q(t)$. В частности, Н. В. Адамов [20] заметил, что

$$\big\{(4.2) + (4.10)\big\} \to \textit{устойчивость} \tag{4.12}$$

и, более того, в этой импликации (4.2) можно заменить более общим условием:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\omega \left[q(t)k^2(t) - \dot{k}^2(t)\right] dt \geqslant 0 \quad \text{для некоторой} \\ \text{вещественной абсолютно непрерывной } k(t), \\ \text{не являющейся на } [0,\omega] \text{ решением (4.1)} \\ \text{и такой, что } |k(0)| = |k(\omega)|. \end{gathered} \tag{4.13}$$

При $k(t) \equiv 1$ (4.13) дает (4.2). Смысл (4.13) состоит в исключении следующей возможности: вещественному мультипликатору (т. е. собственному значению матрицы монодромии) уравнения (4.1) отвечает решение, положительное на $[0,\omega]$ (а следовательно, и на всей прямой). Пусть, например, выполнено (4.2) и, вопреки сказанному, вещественному мультипликатору μ отвечает решение (4.1) $x(t) > 0$:

$$x(\omega) = \mu x(0), \quad \dot{x}(\omega) = \mu \dot{x}(0). \tag{4.14}$$

Так как $x(t) \neq 0$, можно сделать в (4.1) замену $z = -\dfrac{\dot{x}}{x}$, приводящую к уравнению Риккати

$$\dot{z} = z^2 + q(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant \omega). \tag{4.15}$$

Ввиду (4.14) $z(0) = z(\omega)$; кроме того, $z(t) \not\equiv 0$ в $[0,\omega]$, поскольку $q(t) \not\equiv 0$ в $[0,\omega]$. Поэтому интегрирование (4.15) от 0 до ω дает

$$0 = \int\limits_0^\omega \left[z^2(t) + q(t)\right] dt > \int\limits_0^\omega q(t) dt,$$

что противоречит (4.2). Итак, в случае (4.2) вещественному мультипликатору μ может отвечать лишь решение $x(t)$, обращающееся в нуль в некоторой точке t_0; из (4.14) вытекает, что тогда и $x(t_0 + \omega) = 0$. Таким образом, посылка импликации (4.12) обеспечивает невещественность мультипликаторов, а следовательно, и устойчивость (т.к. $\mu_1\mu_2 = 1$, $\mu_1 = \overline{\mu_2}$). Это же относится и к импликации

$$\big\{(4.13) + (4.10)\big\} \to \textit{устойчивость},$$

на которой мы подробнее не останавливаемся, отсылая читателя к [18], [20], [55].

В дальнейшем для простоты предполагается выполненным (4.2); однако все остается в силе и при более общем предположении (4.13).

Аналог (4.7) для знакопеременной $q(t)$ был получен Г. Боргом [71] в форме

$$\int\limits_0^\omega |q(t)| dt \leqslant \frac{4}{\omega}. \tag{4.16}$$

Это малоудачное условие вошло, между прочим, в известные монографии Беллмана [72], Коддингтона и Левинсона [73]. По-видимому, лишь М. Г. Крейн [15] отметил, что никакие дополнительные, помимо (4.2), оценки $q(t)$ снизу для нулевой зоны не нужны и, следовательно, вместо (4.16) достаточно потребовать, чтобы

$$\int\limits_0^\omega q_+(t)\, dt \leqslant \frac{4}{\omega} \quad \big(q_+(t) = \max\{0, q(t)\}\big). \tag{4.17}$$

Ввиду упомянутой связи с расстояниями между нулями решений это вытекает из штурмовской теоремы сравнения.

Как уже отмечалось в § 3, признак (4.17) является точным в том смысле, что постоянная 4 не допускает увеличения, да и правая часть (4.17) в целом, как явствует из соображений размерности, не может быть заменена функцией $f(\omega)$ такой, что $f(\omega) > 4/\omega$ хотя бы при одном ω. Все же, как будет видно, признак устойчивости (4.17) в определенном смысле может быть улучшен.

В работах Г. Борга [71], М. Г. Крейна [15], В. Б. Лидского и М. Г. Нейгауза [74], В. А. Якубовича [16, 75] был получен ряд признаков как для нулевой, так и для остальных зон устойчивости. Не останавливаясь па этом подробнее, отсылаем читателя к обзорной статье В. М. Старжинского [18]; по поводу поздних результатов см., например, [32, 76, 77]. Отметим для дальнейшего один признак, соответствующий нулевой зоне устойчивости (М. Г. Крейн [15], В. А. Якубович [16]):

$$\int\limits_0^\omega [q(t)-a^2]_+ dt \leqslant 2a\operatorname{ctg}\frac{\omega a}{2} \quad \text{при некотором } a\in\Big[0,\frac{\pi}{\omega}\Big]. \tag{4.18}$$

При $a=0$ правая часть доопределяется по непрерывности и переходит в $4\omega^{-1}$, т. е. получаем (4.17); другой предельный случай $a=\pi\omega^{-1}$ дает (4.9). Правая часть (4.18) ни при каких ω, a не может быть заменена большей функцией этих параметров. Таким образом, (4.18) доставляет семейство признаков устойчивости, носящих точный характер и как бы соединяющих (4.9) и (4.17).

Из более поздних работ упомянем статью З. Опяля [17], имевшую для автора стимулирующее значение. В [17] установлен следующий признак устойчивости:

$$\begin{gathered}\int\limits_t^{t+\omega/4} [q(s)-a^2]_+\, ds \leqslant \frac{a}{2}\Big(3-\sqrt{4\operatorname{tg}^2\frac{\omega a}{4}+5}\Big)\operatorname{ctg}\frac{\omega a}{4} \\ \text{при некотором } a\in\big[0,\tfrac{\pi}{\omega}\big] \quad (0\leqslant t<\omega).\end{gathered} \tag{4.19}$$

В предельном случае $a=0$ (4.19) переходит в неравенство

$$\int\limits_t^{t+\omega/4} q_+(s)\,ds \leqslant \frac{6-2\sqrt5}{\omega} \quad (0\leqslant t<\omega). \tag{4.20}$$

4.2. Нашей целью является доказательство следующего предложения[1].

Теорема 4.1. *Пусть при некотором a, $0\leqslant a\leqslant \pi/\omega$ и некотором натуральном n выполнено неравенство*

$$\int\limits_t^{t+\omega/n} [q(s)-a^2]_+\, ds \leqslant 2a\frac{\cos\frac{\omega a}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\omega a}{n}} \quad (0\leqslant t<\omega). \tag{4.21}$$

Тогда решения уравнения (4.1) *ограничены на* $(-\infty,\infty)$.

[1]Предполагается по-прежнему, что $q(t)\not\equiv 0$ вещественна, ω-периодична и неотрицательна в среднем.

В предельном случае $a = 0$ правая часть (4.21), естественно, доопределяется по непрерывности, т. е. (4.21) принимает вид

$$\int\limits_t^{t+\omega/n} q_+(s)\,ds \leqslant \frac{c_n}{\omega} \quad (0 \leqslant t < \omega), \text{ где } c_n = 2n\Big(1 - \cos\frac{\pi}{n}\Big). \tag{4.22}$$

Правые части в (4.21), (4.22) ни при каких ω, n, a не могут быть увеличены.

Имеем

$$c_1 = c_2 = 4, \quad c_3 = 3, \quad c_4 = 8 - 4\sqrt{2}, \ldots$$

При $n \to \infty$ c_n асимптотически убывают как π^2/n, так что в пределе (4.22) переходит в признак Жуковского (4.9). Это же относится и к общему условию (4.21) с любым a.

Совпадение c_1 и c_2 влечет за собой любопытное следствие: *классическое неравенство* (4.17)*, оказывается, может быть заменено условием*

$$\int\limits_t^{t+\omega/2} q_+(s)\,ds \leqslant \frac{4}{\omega} \quad (0 \leqslant t < \omega). \tag{4.23}$$

Аналогичная ситуация имеет место и для $a \neq 0$: при $n = 1$ (4.21) переходит в (4.18); полагая же $n = 2$, убеждаемся, что и здесь интеграл по периоду может быть заменен интегралом по каждому полупериоду.

Таким образом, случай $n = 1$, когда (4.21) переходит в известные результаты, подчинен случаю $n = 2$; случаи же $n = 2, 3, \ldots$, как легко проверить, попарно независимы.

При $n = 4$ теорема 4.1 усиливает приведенный выше результат Опяля. Как показывает подсчет, при любом допустимом a правая часть (4.21) не менее чем в $4/3$ раза превосходит правую часть (4.19); в частности, при $a = 0$ неулучшаемым является значение $c_4 = 8 - 4\sqrt{2}$ ($\approx 2,34$), а не $6 - 2\sqrt{5}$ ($\approx 1,54$). Таким образом, утверждение З. Опяля [17] о количественной неулучшаемости его результата не соответствует действительности.

Отметим, что при проверке выполнения (4.21) можно ограничиться лишь некоторыми $t \in [0, \omega)$. Если, например, требуется проверить (4.23) для непрерывной $q(t)$, то подлежат рассмотрению лишь такие t, для которых либо

$$q(t) = q\Big(t + \frac{\omega}{2}\Big) > 0, \tag{4.24}$$

либо

$$q(t) = 0, \quad q\Big(t + \frac{\omega}{2}\Big) \leqslant 0, \tag{4.25}$$

Если же q вдобавок дифференцируема, то к (4.24) добавляется равенство $\dot{q}(t) \geqslant \dot{q}\big(t + \omega/2\big)$, а к (4.25) — неравенство $\dot{q}(t) \geqslant 0$. Это сразу следует из того, что нас интересуют лишь точки максимума функции

$$f(t) = \int\limits_t^{t+\omega/2} q_+(s)\,ds. \tag{4.26}$$

Аналогичное замечание относится и к общему условию (4.21).

4.3. Связь устойчивости с нулями решений позволяет свести доказательство теоремы 4.1 к вопросу о неосцилляции. По причинам, которые станут ясны ниже, мы перейдем от классического уравнения (4.1) к обобщенному

$$\ddot{x} + \dot{m}(t)x = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant h), \tag{4.27}$$

где $m(t)$ — вещественная функция ограниченной вариации на $[0, h]$ (основной интерес будет представлять случай неубывающей $m(t)$). Соответствующее (4.27) матричное уравнение имеет вид

$$X(t) = I + \int\limits_0^t dM(s)\, X(s); \quad M(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -m(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant t \leqslant h). \tag{4.28}$$

Ввиду структуры $M(t)$ здесь выполнено условие (3.19) и, тем более, условие δ-корректности. Таким образом, как уже отмечалось в § 3, уравнение (4.27) относится к наиболее простым и «хорошим» обобщенным уравнениям. Рассмотрение подобных уравнений восходит к классическим работам Стильтьеса; позднее уравнение вида (4.27) с монотонной (вообще говоря, неограниченной) $m(t)$ эффективно применялись в известных исследованиях М. Г. Крейна по спектральной теории струны [15, 63].

Перепишем (4.28) в координатной форме

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^t y(s)\, ds, \quad y(t) = y(t_0) - \int\limits_{t_0}^t x(s)\, dm(s) \quad (0 \leqslant t, t_0 \leqslant h). \tag{4.29}$$

Из сказанного явствует, что для этой системы уравнений имеет место существование и единственность решения при любых начальных данных $x(t_0)$, $y(t_0)$, а также непрерывная зависимость решений от этих начальных данных (т. е. от значений $x(t_0)$, $y(t_0)$, но не от самого t_0, конечно). С оговоркой относительно разрывности $y(t)$ поведение решений в целом аналогично классическому случаю. В частности, если для некоторого решения величина $|x(t) + |y(t)|$ отлична от нуля хотя бы в одной точке $t \in [0, h]$, то она отлична от нуля и в остальных, так что понятия тривиального и нетривиального решений сохраняют для (4.27), (4.29) свой обычный смысл. Далее каждое нетривиальное решение (4.27) имеет лишь конечное число нулей в $[0, h]$ и между нулями какого-либо нетривиального решения (4.27) лежит нуль всякого другого решения. Далее, обычное преобразование классического уравнения в уравнение Риккати (4.15) возможно и здесь: полагая в (4.29)

$$z(t) = -\frac{y(t)}{x(t)}\,, \tag{4.30}$$

находим, что функция $z(t)$, определенная всюду, где $x(t) \neq 0$, удовлетворяет уравнению $\dot{z} = z^2 + \dot{m}(t)$, т. е.

$$z(t) = z(t_0) + \int\limits_{t_0}^t z^2(s)\, ds + m(t) - m(t_0), \tag{4.31}$$

если $x(\tau) \neq 0$ при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$. Все это проверяется без труда.

Функция $y(t)$ в (4.29), так сказать, «играет роль $\dot{x}(t)$», и равенство $y(t) = \dot{x}(t)$ выполняется во всех точках непрерывности $m(t)$. Следует, однако, подчеркнуть, что, в отличие от $\dot{x}(t)$, $y(t)$ определена и в точках разрыва $m(t)$, поскольку в этих точках определена сама $m(t)$. Таким образом, содержащиеся в обобщенном коэффициенте $q(t) = \dot{m}(t)$ компоненты типа дельта-функций интерпретируются не как $c_i\delta(t-t_i)$, а как $c_i\delta(t-t_i \pm 0)$. Отметим еще, что в тех точках, где $x(t) = 0$, $y(t)$ заведомо непрерывна и, следовательно, совпадает с обычной производной $\dot{x}(t)$; отсюда и из единственности решений вытекает, что нетривиальные решения (4.27) не могут иметь кратных нулей.

Ниже будет установлена

Теорема 4.2. *Пусть* $m(t) = a^2t + r(t)$, *где* $a \in \left[0, \dfrac{\pi}{h}\right)$ *— постоянная и* $r(t)$ *— неубывающая в* $[0,h]$ *функция, удовлетворяющая при каком-либо целом* $n > 0$ *неравенству*

$$r\Big(t+\frac{h}{n}\Big) - r(t) < 2a\frac{\cos\frac{ha}{n} - \cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{ha}{n}} \quad \Big(0 \leqslant t \leqslant \frac{n-1}{n}h\Big). \tag{4.32}$$

Тогда каждое решение уравнения (4.27) *имеет не более одного нуля в* $[0,h]$.

Если $r(t)$ *непрерывна, то строгий знак неравенства в* (4.32) *может быть заменен нестрогим.*

Допустим, что теорема 4.2 уже доказана. Тогда, возвращаясь к теореме 4.1, можно положить

$$r(t) = \int_0^t [q(s) - a^2]_+\,ds, \quad h = \omega,$$

после чего ввиду (4.21) и непрерывности $r(t)$ мы оказываемся в условиях теоремы 4.2. Таким образом, (4.21) означает, что каждое нетривиальное решение (4.1) имеет не более одного нуля в $[0,\omega]$[1], причем, ввиду очевидной замены переменной, это остается в силе и для любого промежутка вида $[t_0, t_0+\omega]$. Итак (4.21) влечет за собой (4.8), а следовательно, и (4.10). Так как (4.2) выполнено по предположению, остается сослаться (4.12).

Теорема 4.1, таким образом, вытекает из теоремы 4.2. Ясно также, что условиям теоремы 4.1 соответствует нулевая зона устойчивости.

Доказательство теоремы 4.2 проводится в несколько этапов.

4.4. Начнем с одного предложения о сравнении для обобщенных уравнений Риккати

$$\dot{z}_i = z_i^2 + \dot{m}_i(t), \quad i = 1,2 \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \tag{4.33}$$

где $m_1(t)$, $m_2(t)$ — вещественные функции ограниченной вариации на $[t_0, t_1]$. Смысл (4.33) состоит, естественно, в локальном (т. е. между полюсами z_i) выполнении интегральных уравнений, аналогичных (4.31). Для простоты записи предположим без ограничения общности, что

$$m_1(t_0) = m_2(t_0) = 0. \tag{4.34}$$

[1]За исключением тривиального случая $q(t) \equiv a^2 = \pi^2\omega^{-2}$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнено неравенство*

$$|z_1(t_0) + m_1(t)| \leqslant z_2(t_0) + m_2(t) \quad (t_0 < t \leqslant t_1) \tag{4.35}$$

и $z_2(t)$ ограничена на $[t_0, t_1]$. Тогда и $z_1(t)$ ограничена на $[t_0, t_1]$, причем

$$|z_1(t)| \leqslant z_2(t) \quad (t_0 < t \leqslant t_1). \tag{4.36}$$

Докажем (4.36). Из (4.35) вытекает, в частности, что

$$|z_1(t_0) + m_1(t_0 + 0)| \leqslant z_2(t_0) + m_2(t_0 + 0). \tag{4.37}$$

Пусть вначале в (4.37) имеет место строгий знак неравенства:

$$|z_1(t_0) + m_1(t_0 + 0)| < z_2(t_0) + m_2(t_0 + 0), \tag{4.38}$$

что, согласно (4.33), (4.34), можно переписать в виде

$$|z_1(t_0 + 0)| < z_2(t_0 + 0). \tag{4.39}$$

Итак, для t, близких справа к t_0, (4.36) выполнено, и притом со строгим знаком неравенства. Предположим, что существуют $t \in (t_0, t_1]$, для которых (4.36) не выполняется, и обозначим $infimum$ таких t через τ.

Поскольку $|z_1(t)| \leqslant z_2(t)$ в (t_0, τ), то

$$\int\limits_{t_0}^{\tau} z_1^2(s)\, ds < \int\limits_{t_0}^{\tau} z_2^2(s)\, ds; \tag{4.40}$$

равенство исключается ввиду (4.39). Так как в (t_0, τ) $z_1(t)$ не имеет полюсов, то в этом промежутке удовлетворяется соответствующее интегральное уравнение, которое с учетом (4.35), (4.40) дает

$$\begin{aligned}|z_1(\tau)| = \left| z_1(t_0) + m_1(\tau) + \int\limits_{t_0}^{\tau} z_1^2(s)\, ds \right| \leqslant |z_1(t_0) + m_1(\tau)| + {}\\ + \int\limits_{t_0}^{\tau} z_1^2(s)\, ds < z_2(t_0) + m_2(\tau) + \int\limits_{t_0}^{\tau} z_2^2(s)\, ds = z_2(\tau).\end{aligned} \tag{4.41}$$

Таким образом, (4.36) выполнено и при $t = \tau$. Более того, это же относится и к $t = \tau + \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ (если $\tau < t_1$). В самом деле, из конечности $z_1(\tau)$ вытекает ограниченность $z_1(t)$ в малой правой полуокрестности точки $t = \tau$. Поэтому соотношение (4.40), а вместе и (4.41) сохраняют силу при замене τ на $\tau + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Но выполнение (4.36) для $t = \tau$ и t, близких справа к τ (если $\tau < t_1$), противоречит определению τ. Итак, для случая (4.38) неравенство (4.36) доказано.

Рассмотрим оставшуюся возможность знака равенства в (4.37)

$$|z_1(t_0) + m_1(t_0 + 0)| = z_2(t_0) + m_2(t_0 + 0). \tag{4.42}$$

Для сведения этого случая к предыдущему воспользуемся непрерывной зависимостью решений уравнения

$$\dot{z}_2 = z_2^2 + \dot{m}_2(t) \tag{4.43}$$

от начального значения $z_2(t_0)$. Требуемая непрерывность вытекает из общих соображений, связанных с существованием и единственностью, но проще усматривается из явной формулы решения $z_2^\varepsilon(t)$ уравнения (4.43) с начальным условием $z_2^\varepsilon(t) = z_2(t_0) + \varepsilon$:

$$z_2^\varepsilon(t) = z_2(t) + \varepsilon \exp\left(2\int\limits_{t_0}^{t} z_2(s)\,ds\right)\left(1 - \varepsilon\int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(2\int\limits_{t_0}^{\tau} z_2(s)\,ds\right)d\tau\right)^{-1}.$$

Эта формула сохраняет силу и для обобщённого уравнения, что проверяется без труда. Таким образом, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то решение $z_2^\varepsilon(t)$ ограничено на $[t_0, t_1]$ вместе с $z_2(t)$ и

$$z_2^\varepsilon(t) \to z_2(t) \quad (\varepsilon \to 0) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{4.44}$$

Заменяя $z_2(t)$ на $z_2^\varepsilon(t)$, мы приходим, согласно (4.42) и неравенству $z_2^\varepsilon(t_0) > z_2(t_0)$, к рассмотренному уже случаю строгого неравенства, откуда

$$|z_1(t)| \leqslant z_2^\varepsilon(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ с учетом (4.44), получаем (4.36).

Доказанная лемма с помощью очевидной замены переменной может быть переформулирована следующим образом. Пусть те же уравнения (4.33) рассматриваются на промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_0$ в прежнем предположении (4.34). Если $z_2(t)$ ограничена на $[t_1, t_0)$ и

$$|z_1(t_0) + m_1(t)| \leqslant -z_2(t_0) - m_2(t) \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_0), \tag{4.45}$$

то и $z_1(t)$ ограничена на $[t_1, t_0)$, причем $|z_1(t)| \leqslant -z_2(t)$ $(t_1 \leqslant t < t_0)$.

4.5. Посмотрим, во что трансформируется лемма 4.1 для линейных уравнений

$$\ddot{x}_1 + \dot{m}_1(t)x_1 = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant h), \tag{4.46}$$

$$\ddot{x}_2 + \dot{m}_2(t)x_2 = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant h), \tag{4.47}$$

с прежними требованиями (вещественность, ограниченность вариации) относительно $m_i(t)$.

Предположим, что (4.46) обладает нетривиальным решением $x_1(t)$ таким, что

$$x_1(0) = x_1(h) = 0. \tag{4.48}$$

Через $y_1(t)$ обозначим вторую компоненту соответствующего вектор-решения системы вида (4.29) (при $m = m_1$, $x = x_1$).

Лемма 4.2. *Если при сделанных предположениях для некоторого $t_0 \in (0, h)$ и какой-либо вещественной постоянной c выполняется неравенство*

$$\left|m_1(t) - m_1(t_0) - \frac{y_1(t_0)}{x_1(t_0)}\right| \leqslant \big[m_2(t) - m_2(t_0) - c\big]\operatorname{sign}(t - t_0) \quad (0 \leqslant t \leqslant h, t \neq t_0), \tag{4.49}$$

то уравнение (4.47) *обладает нетривиальным решением $x_2(t)$, имеющим не менее двух нулей в $[0, h]$.*

Действительно, определим решение системы (4.29) с $m = m_2$ начальными данными $x_2(t_0) = 1$, $y_2(t_0) = c$. Покажем, что решение $x_2(t)$ уравнения (4.47) имеет в каждом из промежутков $[0, t_0)$, $(t_0, h]$ не менее одного нуля. Полагая

$$z_i(t) = -\frac{y_i(t)}{x_i(t)}\,, \quad i = 1, 2,$$

получаем для $z_i(t)$ уравнение Риккати (4.33) на $[0, h]$. Как уже говорилось, для нетривиальных решений (4.29) при любом t по крайней мере одна из компонент $x(t)$, $y(t)$ отлична от нуля; поэтому $z_i(t)$ обращается в бесконечность в тех и только тех точках, где $x_i(t) = 0$. Мы должны, таким образом, показать, что $z_2(t)$ не может быть ограниченной ни в одном из промежутков $[0, t_0]$, $[t_0, h]$.

Предположим противное: пусть $z_2(t)$ ограничена, например, на $[t_0, h]$. Без ограничения общности можно считать выполненным (4.34), т. к. $m_i(t)$ определены с точностью до постоянного слагаемого. Учитывая равенства

$$z_1(t_0) = -\frac{y_1(t_0)}{x_1(t_0)}\,, \quad z_2(t_0) = -c,$$

убеждаемся, что соотношение (4.49) для $[t_0, h]$ совпадает с неравенством (4.35) (при $t = h$). Поэтому, согласно лемме 4.1, вместе с $z_2(t)$ на $[t_0, h]$ должна быть ограничена и $z_1(t)$. Но это невозможно, поскольку $z_1(t)$ имеет полюс при $t = h$ в силу (4.48). Полученное противоречие показывает, что $z_2(t)$ не ограничена в $[t_0, h]$, т. е. $x_2(t)$ имеет в $[t_0, h]$ по крайней мере один нуль.

Точно так же проверяется, что $x_2(t)$ имеет нуль в $[0, h]$; при этом используется не сама лемма 4.1, а ее переформулировка, приведенная в конце п. 4.4.

Стоит остановиться на лемме 4.2 для классического случая (хотя для доказательства теоремы 4.2 он непосредственно не понадобится). Итак, пусть даны уравнения

$$\ddot{x}_1 + q_1(t)x_1 = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant h), \tag{4.50}$$

$$\ddot{x}_2 + q_2(t)x_2 = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant h) \tag{4.51}$$

с вещественными суммируемыми в $[0, h]$ коэффициентами. Сопоставляя (4.49) для $t = t_0 + 0$ и $t = t_0 - 0$ и учитывая непрерывность соответствующих $m_i(t) = \int^t q_i(s)\,ds$, легко убедиться, что (4.49) может выполняться лишь при $y_1(t_0) = c = 0$. Таким образом, получаем

Следствие 4.1. *Пусть уравнение* (4.50) *обладает нетривиальным решением* $x_1(t)$ *таким, что*

$$x_1(0) = x_1(h) = \dot{x}_1(t_0) = 0 \quad (0 < t_0 < h).$$

Если выполнено неравенство

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t} q_1(s)\,ds\Big| \leqslant \int\limits_{\min\{t_0,t\}}^{\max\{t_0,t\}} q_2(s)\,ds \quad (0 < t < h), \tag{4.52}$$

то уравнение (4.51) *обладает нетривиальным решением, имеющим в* $[0, h]$ *не менее двух нулей (и следовательно, каждое решение* (4.51) *имеет в* $[0, h)$ *по крайней мере один нуль).*

Это предложение может рассматриваться как интегральный аналог классической теоремы сравнения Штурма для уравнений (4.50), (4.51), поскольку здесь сравниваются не сами коэффициенты $q_i(t)$, а интегралы от них (по отрезкам специального вида). В случае неотрицательности коэффициентов (или хотя бы одного $q_1(t)$) следствие 4.1 является прямым обобщением штурмовской теоремы, но в общем случае это не совсем так из-за знака модуля в левой части (4.52), который, как показывают примеры, не может быть отброшен. Аналогичный интегральный принцип сравнения справедлив (см. [70]) и для уравнений вида

$$\frac{d}{dt}\left[r_i(t)\frac{dx}{dt}\right] + q_i(t)x = 0, \quad i = 1, 2$$

с неотрицательными коэффициентами; подробнее на этом не останавливаемся.

4.6. Переходим к этапу, на котором выяснится роль обобщенных уравнений в данном вопросе и который с этой точки зрения является ключевым моментом доказательства теоремы 4.2.

Пусть a $(0 \leqslant a < \pi/n)$, l $(0 < l \leqslant h/2)$ и ξ — некоторые заданные постоянные. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}_1 + \bigl[a^2 + \dot{r}_1(t)\bigr]x_1 = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant h), \tag{4.53}$$

где $r_1(t)$ — неубывающая на $[0, h]$ функция, подчиненная условию

$$r_1(t + l) - r_1(t) \leqslant \xi \quad (0 \leqslant t \leqslant h - l). \tag{4.54}$$

Лемма 4.3. *Пусть уравнение* (4.53) *обладает нетривиальным решением* $x_1(t)$ *таким, что* $x_1(0) = x_1(h) = 0$. *Тогда найдется неубывающая на* $[0, h]$ *функция* $r_2(t)$ *такая, что:*

1) $r_2(t + l) - r_2(t) \equiv \xi \quad (0 \leqslant t \leqslant h - l);$ (4.55)

2) *уравнение*

$$\ddot{x}_2 + \bigl[a^2 + \dot{r}_2(t)\bigr]x_2 = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant h) \tag{4.56}$$

обладает нетривиальным решением, имеющим в $[0, h]$ *не менее двух нулей.*

Смысл леммы, очевидно, в том, что она позволяет осуществить переход к уравнению с l-периодическим обобщенным коэффициентом $a^2 + \dot{r}_2(t)$. Перейдем к доказательству.

Пусть t_0 — точка максимума (возможно, нестрогого) $x_1(t)$ на промежутке $[0, h]$. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$x_1(t_0) = 1. \tag{4.57}$$

Наряду с $x_1(t)$ будем, как и прежде, рассматривать $y_1(t)$ — вторую компоненту решения соответствующей системы типа (4.29)

$$x_1(t) = 1 + \int\limits_{t_0}^{t} y_1(s)\,ds, \tag{4.58}$$

$$y_1(t) = y_1(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} x_1(s)\big[a^2\,ds + dr_1(s)\big]. \tag{4.59}$$

Так как t_0 — точка максимума $x_1(t)$, то в силу (4.58)

$$y_1(t_0 - 0) \geqslant 0, \quad y_1(t_0 + 0) \leqslant 0 \tag{4.60}$$

(пределы $y_1(t_0 \pm 0)$ существуют, поскольку $V_0^h y_1 < \infty$). Учитывая (4.57), (4.59), перепишем неравенства (4.60) в виде

$$y_1(t_0) - r_1(t_0 - 0) + r_1(t_0) \geqslant 0, \quad y_1(t_0) - r_1(t_0 + 0) + r_1(t_0) \leqslant 0,$$

а так как $r_1(t)$ не убывает, последние неравенства, в свою очередь, эквивалентны соотношению

$$\big[r_1(t) - r_1(t_0) - y_1(t_0)\big](t - t_0) \geqslant 0, \quad (0 \leqslant t_0 \leqslant h). \tag{4.61}$$

Предположим, что нам удалось найти неубывающую в $[0,h]$ функцию $r_2(t)$, для которой выполнены неравенства

$$r_2(t) \leqslant r_1(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0), \tag{4.62}$$

$$r_2(t) \geqslant r_1(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant h) \tag{4.63}$$

и тождество (4.55). Тогда уравнение (4.56) будет удовлетворить требуемому условию. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся леммой 4.2 для уравнений (4.53), (4.56), т. е. при

$$m_i(t) = a^2 t + r_i(t), \quad i = 1, 2. \tag{4.64}$$

Именно, покажем, что предпосылка (4.49) этой леммы выполняется при $c = y_1(t_0)$. В самом деле, с учетом (4.57), (4.64) и вытекающего из (4.62), (4.63) равенства $r_1(t_0) = r_2(t_0)$ соотношение (4.49) принимает вид

$$\begin{aligned} &\big|a^2(t - t_0) + r_1(t) - r_1(t_0) - y_1(t_0)\big| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \big[a^2(t - t_0) + r_2(t) - r_1(t_0) - y_1(t_0)\big]\operatorname{sign}(t - t_0) \quad (0 \leqslant t \leqslant h,\ t \neq t_0). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Согласно (4.61), величина, стоящая под знаком модуля, неположительна при $0 \leqslant t < t_0$ и неотрицательна при $t_0 < t \leqslant h$. Поэтому при $t < t_0$ (4.65) вытекает из (4.62), а при $t > t_0$ — из (4.63).

Итак, соотношения (4.48), (4.49) в нашем случае выполнены, и поэтому уравнение (4.56) обладает нетривиальным решением, имеющим не менее двух нулей в $[0,h]$.

Таким образом, задача свелась к проверке существования неубывающей функции $r_2(t)$, удовлетворяющей условиям (4.55), (4.62), (4.63). Благодаря тому, что мы имеем дело с обобщенными уравнениями и поэтому не связаны требованием абсолютной непрерывности $r_2(t)$, такую функцию можно построить непосредственно.

Поскольку $2l \leqslant h$, длина по крайней мере одного из отрезков $[0,t_0]$, $[t_0,h]$ не меньше l. Пусть, например,

$$h - t_0 \geqslant l. \tag{4.66}$$

Всякое $t \in [0,h]$ представимо, и притом единственным образом в виде

$$t = t^* + nl, \quad \text{где } t^* \in [t_0, t_0 + l) \text{ и } n\text{— целое.} \tag{4.67}$$

Положим
$$r_2(t) = r_1(t^*) + n\xi \quad (0 \leqslant t \leqslant h). \tag{4.68}$$

Требование (4.55) выполняется, стало быть, автоматически. Что касается неубывания $r_2(t)$, то, ввиду неубывания $r_1(t)$ на $[t_0, t_0 + l)$ и способа определения $r_2(t)$, достаточно проверить лишь, что $r_2(t_0 - 0)$ не превосходит $r_2(t_0)$. Учитывая (4.54), (4.68) и неубывание $r_1(t)$, имеем

$$r_2(t_0 - 0) = r_1(t_0 + l - 0) - \xi \leqslant r_1(t_0 + l) - \xi \leqslant r_1(t_0) = r_2(t_0).$$

Осталось проверить лишь (4.62), (4.63). Для этой цели снова прибегнем к представлению (4.67) и заметим, что из (4.54) очевидным образом выводятся неравенства

$$r_1(t) \leqslant r_1(t^*) + n\xi \quad \text{при } t \geqslant t_0 \text{ (т. е. при } n \geqslant 0),$$
$$r_1(t) \geqslant r_1(t^*) + n\xi \quad \text{при } t < t_0 \text{ (т. е. при } n < 0).$$

Сопоставление с (4.68) доказывает неравенства (4.62) и (4.63).

Мы доказали лемму 4.3 для случая (4.66). Если вместо (4.66) выполнено неравенство $t_0 \geqslant l$, то построение $r_2(t)$ осуществляется аналогично, с заменой полуинтервала $[t_0, t_0 + l)$ полуинтервалом $(t_0 - l, t_0]$. Можно также привести этот случай к рассмотренному заменой переменной $\tau = h - t$.

Отметим, что фактически доказано несколько большее, чем утверждение леммы 4.3. Именно, построенная функция $r_2(t)$, помимо свойств, требуемых леммой, совпадает с $r_1(t)$ на некотором полуинтервале длины l. Это обстоятельство будет полезно в дальнейшем.

4.7. В данном пункте для рассматриваемого на промежутке $0 \leqslant t \leqslant l$ обобщенного уравнения

$$\ddot{x} + \big[a^2 + \dot{r}(t)\big]x = 0, \tag{4.69}$$

где $a \geqslant 0$ и $r(t)$ не убывает на $[0, l]$, будет получена оценка, родственная неравенству (4.6).

Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — решения (4.69), определенные условиями (4.3). Здесь и далее, ради того, чтобы подчеркнуть аналогию с классическим случаем, мы используем обозначение $\dot{x}(t)$ для $y(t)$ — второй компоненты решения системы вида (4.29); таким образом, $\dot{x}(t)$ может испытывать скачки. (Впрочем, для обобщенных коэффициентов мы постоянно пользуемся подобными вольностями записи.)

Лемма 4.4. *Пусть*
$$2al \leqslant \pi, \tag{4.70}$$

$$x_1(t) \text{ *имеет не более одного нуля в* } (0, l). \tag{4.71}$$

Тогда
$$x_1(l) + \dot{x}_2(l) \geqslant 2\cos al - \frac{\sin al}{a}[r(l) - r(0)], \tag{4.72}$$
причем знак равенства может иметь место лишь в том случае, если для некоторого $\tau \in (0, l)$ $r(t)$ постоянна в каждом из интервалов $(0, \tau)$, (τ, l).

В предельном случае $a = 0$ (4.72), естественно, следует понимать как

$$x_1(l) + \dot{x}_2(l) \geqslant 2 - l[r(l) - r(0)]. \tag{4.73}$$

Это неравенство, очевидно, аналогично заключению импликации (4.6) ($d = \dot{r}$, $t = l$), хотя предположение (4.71) отличается от посылки импликации (4.6). Легко показать, что оно является более общим и для его выполнения достаточно, чтобы $l[r(l) - r(0)] < 9$, причем для непрерывных $r(t)$ допускается знак равенства. (Таким образом, константа 6 в (4.6) может быть заменена на 9; кстати, и это значение не является максимальным, поскольку условие (4.71) не носит необходимого характера). Отметим, впрочем, что лемма 4.4 применяется ниже в ситуации, когда справедливы и (4.71), и посылка (4.6), так что для случая $a = 0$ мы могли бы воспользоваться неравенством Ляпунова (4.6) (точнее, его аналогом для обобщенного уравнения). Так как подлежат рассмотрению и ненулевые значения a, докажем лемму 4.4; при этом проведем рассуждения лишь для $a > 0$, ибо случай $a = 0$ отличается лишь дополнительными упрощениями.

Заметим прежде всего, что для решения $x(t)$ уравнения (4.69) и его обобщенной производной $\dot{x}(t)$ верны обычные соотношения

$$x(t) = x(0)\cos at + \frac{1}{a}\dot{x}\sin at - \frac{1}{a}\int\limits_0^t \sin a(t-s)x(s)\,dr(s),$$

$$\dot{x}(t) = -ax(0)\sin at + \dot{x}(0)\cos at - \int\limits_0^t \cos a(t-s)x(s)\,dr(s).$$

Справедливость этих равенств легко проверяется непосредственно (помимо того, она достаточно очевидна ввиду возможности дельтаобразной аппроксимации). Применительно к $x_1(t)$, $x_2(t)$ получаем

$$x_1(t) = \cos at - \frac{1}{a}\int\limits_0^t \sin a(t-s)x_1(s)\,dr(s), \quad (0 \leqslant t \leqslant l), \tag{4.74}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{a}\sin at - \frac{1}{a}\int\limits_0^t \sin a(t-s)x_2(s)\,dr(s), \quad (0 \leqslant t \leqslant l), \tag{4.75}$$

$$\dot{x}_2(t) = \cos at - \int\limits_0^t \cos a(t-s)x_2(s)\,dr(s), \quad (0 \leqslant t \leqslant l). \tag{4.76}$$

Ввиду (4.70)

$$\sin a(t-s) \geqslant 0,\ \cos a(t-s) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant l). \tag{4.77}$$

Отсюда легко следуют неравенства

$$x_1(t) \leqslant \cos at \quad (0 \leqslant t \leqslant l), \tag{4.78}$$

$$x_1(t) \leqslant \frac{1}{a}\sin at \quad (0 \leqslant t \leqslant l). \tag{4.79}$$

Действительно, если $x_1(t) > 0$ в $(0, l)$, то (4.78) непосредственно вытекает из (4.74), (4.77) и неубывания $r(t)$. Пусть теперь $x_1(t)$ имеет нуль $t_1 \in (0, l)$. Тогда по тем же соображениям неравенство (4.78) выполняется для $t \in [0, t_1]$; что касается t, лежащих справа от t_1, то ввиду (4.71), (4.77) и положительности $x_1(0)$

$$x_1(t) \leqslant 0 \leqslant \cos at \quad (t_1 \leqslant t \leqslant l).$$

Неравенство (4.79) проверяется аналогично, поскольку из (4.71) и равенства $x_2(0) = 0$ вытекает, согласно теореме о разделении нулей, что и $x_2(t)$ имеет не более одного нуля в $(0, l)$.

Полученные оценки (4.78), (4.79) подставим в (4.74), (4.76). Учитывая неубывание $r(t)$ и (4.77), находим:

$$x_1(t) \geqslant \cos at - \frac{1}{a}\int_0^t \sin a(t-s)\cos as\, dr(s), \quad (0 \leqslant t \leqslant l), \tag{4.80}$$

$$\dot{x}_2(t) \geqslant \cos at - \frac{1}{a}\int_0^t \cos a(t-s)\sin as\, dr(s), \quad (0 \leqslant t \leqslant l). \tag{4.81}$$

Сложение этих неравенств дает

$$x_1(t) + \dot{x}_2(t) \geqslant 2\cos at - \frac{1}{a}\int_0^t \sin\big[a(t-s) + as\big]\, dr(s) =$$

$$= 2\cos at - \frac{\sin at}{a}\big[r(t) - r(0)\big] \quad (0 \leqslant t \leqslant l). \tag{4.82}$$

Полагая $t = l$, получаем (4.72).

Осталось доказать утверждение леммы относительно строгости знака неравенства в (4.72). Будем говорить, что $\tau \in [0, l]$ есть точка роста функции $r(t)$, если $r(\tau_1) < r(\tau_2)$ при любых τ_1, τ_2 таких, что $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2 \leqslant l$, $\tau_1 \neq \tau_2$. Мы должны показать, что при наличии у $r(t)$ не менее двух точек роста в $(0, l)$ неравенство (4.72) является строгим.

Очевидно следующее: если $0 < c \leqslant l$, непрерывная функция $f(s)$ неотрицательна в $[0, c]$ и $f(\tau) \neq 0$, где $\tau \in [0, c)$ — некоторая точка роста $r(t)$, то

$$\int_0^c f(s)\, dr(s) > 0.$$

Пусть τ_1 и τ_2 — точки роста $r(t)$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < l$. Ввиду линейной независимости $x_1(t)$, $x_2(t)$, хотя бы одно из этих решений отлично от нуля при $t = \tau$. Предположим, например, что

$$x_1(\tau_1) \neq 0. \tag{4.83}$$

Тогда

$$x_1(\tau_2) < \cos a\tau_2. \tag{4.84}$$

В самом деле, при $x_1(\tau_2) < 0$ неравенство (4.84) очевидно; если же $x_1(\tau_2) \geqslant 0$, то, согласно (4.71), $x_1(t) \geqslant 0$ в $[0, \tau_2]$. Поэтому, применяя приведенное выше замечание для

$$c = \tau_2,\ \tau = \tau_1, \quad f(s) = \sin a(\tau_2 - s)\, x_1(s),$$

получаем

$$\int\limits_0^{\tau_2} \sin a(\tau_2 - s) x_1(s)\, dr(s) > 0,$$

что эквивалентно (4.84) ввиду (4.74).

Итак, (4.84) выполнено. Теперь, учитывая (4.78), (4.84), вторично воспользуемся тем же замечанием для

$$c = l,\ \tau = \tau_2, \quad f(s) = \sin a(l - s)\big[\cos as - x_1(s)\big].$$

Получаем, что при $t = l$ интегральный член в правой части (4.80) строго больше соответствующего члена в (4.74), и поэтому при $t = l$ неравенство (4.80) является строгим. То же самое относится, следовательно, и к неравенству (4.82).

Если вместо (4.83) выполнено условие $x_2(\tau_1) \neq 0$, то аналогично проверяем, что $x_2(\tau_2) < \dfrac{1}{a} \sin a\tau_2$. После этого, применяя то же замечание для

$$c = l,\ \tau = \tau_2, \quad f(s) = \cos a(l - s)\Big[\frac{1}{a} \sin as - x_2(s)\Big],$$

заключаем, что при $t = l$ в (4.81), а следовательно, и в (4.82) знак неравенства является строгим. Лемма 4.4 полностью доказана.

4.8. Теперь мы, наконец, в состоянии форсировать доказательство теоремы 4.2, которое будет проводиться от противного.

Предположим пока, что неравенство (4.32) выполняется в несколько усиленном виде:

$$r\Big(t + \frac{h}{n}\Big) - r(t) \leqslant \xi < \xi_n(a, h) \overset{Df}{=} 2a \frac{\cos \frac{ha}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{ha}{n}} \quad \Big(0 \leqslant t \leqslant \frac{n-1}{n} h\Big) \tag{4.85}$$

(случай, когда левая часть (4.85) имеет своей точной верхней гранью $\xi_n(a, h)$, рассмотрим позднее). Пусть в то же время уравнение (4.69) обладает решением $x(t)$ ($\not\equiv 0$), имеющим не более двух нулей в $[0, h]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x(0) = x(h) = 0$, т. к. ввиду неубывания $r(t)$ (4.85) сохраняет силу при замене h на любое $h' \in (0, h)$.

Соотношение (4.85) записано в форме, относящейся, строго говоря, к $a > 0$; для $a = 0$ оно, естественно, принимает вид:

$$r\Big(t + \frac{h}{n}\Big) - r(t) \leqslant \xi < \xi_n(0, h) \overset{Df}{=} \frac{2n}{h}\Big(1 - \cos \frac{\pi}{n}\Big) \quad \Big(0 \leqslant t \leqslant \frac{n-1}{n} h\Big). \tag{4.86}$$

Как уже отмечалось выше, при $n = 1$ требование (4.85) является более жестким, чем при $n = 2$; в дальнейшем считаем поэтому, что $n \geqslant 2$.

Благодаря лемме 4.3 при

$$l = \frac{h}{n} \Big(\leqslant \frac{h}{2}\Big),$$

можно заменить неравенство (4.83) тождеством

$$r\Big(t + \frac{h}{n}\Big) - r(t) \equiv \xi < \xi_n(a, h) \quad \Big(0 \leqslant t \leqslant \frac{n-1}{n} h\Big) \tag{4.87}$$

с тем, чтобы уравнение (4.69) по-прежнему обладало нетривиальным решением $x(t)$, имеющим более одного нуля в $[0, h]$. Здесь опять-таки можно без ограничения считать, что

$$x(0) = x(h) = 0, \; x(t) > 0 \quad (0 < t < h). \tag{4.88}$$

Покажем это, для чего рассмотрим уравнение с параметром γ

$$\ddot{x} + \big[a^2 + \gamma\dot{r}(t)\big]x = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant h), \; 0 \leqslant \gamma \leqslant 1, \tag{4.89}$$

переходящее в (4.69) при $\gamma = 1$. Пусть $x(t, \gamma)$ есть решение (4.89), определенное начальными условиями

$$x(0, \gamma) = 0, \quad \dot{x}(0, \gamma) = 1,$$

а $\tau(\gamma)$ — самый левый из нулей $x(t, \gamma)$ в полуинтервале $0 < t \leqslant h$ (если при данном γ таковые нули существуют). Легко проверить, что $x(t, \gamma)$ непрерывно по γ; достаточно, например, записать решение матричного уравнения (4.28) в виде ряда (3.6). Поскольку $x(t, \gamma)$ как функция t имеет лишь простые нули, то и $\tau(\gamma)$ в своей области определения непрерывно (и, как легко видеть, монотонно) зависит от γ. Из существования нетривиального решения (4.69), имеющего более одного нуля в $[0, h]$, и разделения нулей вытекает, что $\tau(1)$ существует; с другой стороны, $\tau(0)$ не существует, т. к. $0 \leqslant a < \pi h^{-1}$. Поэтому найдется значение $\gamma_0 \in (0, 1]$ такое, что $\tau(\gamma_0) = h$. Заменяя $r(t)$ на неубывающую функцию $\tilde{r}(t) = \gamma_0 r(t)$, приходим к уравнению с решением вида (4.88). При этом условие, аналогичное (4.87), для $\tilde{r}(t)$ будет выполняться с другой константой $\tilde{\xi} = \gamma_0\xi$; так как $\tilde{\xi} \leqslant \xi$, то неравенство $\tilde{\xi} \leqslant \xi_n(a, h)$ сохранится, а ничего другого от этой константы и не требуется.

Тем самым показано, что соотношения (4.87), (4.88) не ограничивают общности. Задача теперь в том, чтобы привести эти соотношения к противоречию.

Сохраним обозначение x_i, $i = 1, 2$ за решениями (4.69), удовлетворяющими условию (4.3); при этом $\dot{x}_i \,(= y_i)$ трактуется в указанном выше обобщенном смысле. Полагая, по-прежнему, $l = hn^{-1}$, мы оказываемся в условиях леммы 4.4, т. к. (4.71) вытекает из (4.88) ввиду разделения нулей. Учитывая (4.87), имеем поэтому

$$\begin{aligned} x_1\Big(\frac{h}{n}\Big) + \dot{x}_2\Big(\frac{h}{n}\Big) &\geqslant 2\cos\frac{ha}{n} - \frac{1}{a}\sin\frac{ha}{n}\Big[r\Big(\frac{h}{n}\Big) - r(0)\Big] = \\ &= 2\cos\frac{ha}{n} - \frac{\xi}{a}\sin\frac{ha}{n} > 2\cos\frac{ha}{n} - \frac{\xi_n(a, h)}{a}\sin\frac{ha}{n} = 2\cos\frac{\pi}{n}. \end{aligned} \tag{4.90}$$

При $a = 0$ соотношения (4.73), (4.86) приводят, очевидно, к тому же результату.

При любом $\tau \in [0, h]$ матрица

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) \\ \dot{x}_1(\tau) & \dot{x}_2(\tau) \end{pmatrix} \quad (\dot{x}_i = y_i)$$

отвечает линейному оператору сдвига из $t = 0$ в $t = \tau$ для уравнения (4.69) (точно так же, как и в классическом случае). Согласно (4.87), обобщенный коэффициент $a^2 + \dot{r}(t)$ в (4.69) является h/n-периодическим; поэтому

$$A(h) = A^n\Big(\frac{h}{n}\Big). \tag{4.91}$$

Обозначим собственные значения $A(\tau)$ через $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$. Поскольку детерминант $A(\tau)$ тождественно равен 1 (это очевидно, например, из соображений предельного перехода), то для $\mu_i(\tau)$ справедливо обычное равенство

$$\mu_1(\tau)\mu_2(\tau) \equiv 1 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant h). \tag{4.92}$$

Существование решения $x(t)$, удовлетворяющего условию (4.88), свидетельствует о том, что
$$\mu_1(h) < 0, \quad \mu_2(h) < 0. \tag{4.93}$$
Действительно, как уже отмечалось выше, в точках, где $x(t)$ аннулируется, $y(t) = \dot{x}(t)$ непрерывна и поэтому является производной от $x(t)$ в обычном смысле. Отсюда следует, что $x(t)$, наряду с (4.88), удовлетворяет также условиям $\dot{x}(0) > 0$, $\dot{x}(h) < 0$, т. е. совпадает с $x_2(t)$ с точностью до положительного множителя. Таким образом, матрица
$$A(h) = \begin{pmatrix} x_1(h) & 0 \\ \dot{x}_1(h) & \dot{x}_2(h) \end{pmatrix}$$
имеет отрицательные собственные значения $\dot{x}_2(h)$ и $\dfrac{1}{\dot{x}_2(h)} = x_1(h)$.

Согласно (4.91), неравенства (4.93) переписываются в виде
$$\mu_i^n\left(\frac{h}{n}\right) < 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.94}$$

В то же время соотношение (4.90) показывает, что
$$\mu_1\left(\frac{h}{n}\right) + \mu_2\left(\frac{h}{n}\right) = x_1\left(\frac{h}{n}\right) + \dot{x}_2\left(\frac{h}{n}\right) > 2\cos\frac{\pi}{n} \ (\geqslant 0). \tag{4.95}$$

Легко видеть, что неравенства (4.94), (4.95) несовместимы. В самом деле, $\mu_i(hn^{-1})$ не могут быть ни положительными, ввиду (4.94), ни отрицательными, ввиду (4.95). Остается возможность невещественных $\mu_i(hn^{-1})$; в этом случае, вследствие вещественности $A(hn^{-1})$ и равенства (4.92), $\mu_i(hn^{-1})$ должны лежать на единичной окружности:
$$\mu_{1,2}\left(\frac{h}{n}\right) = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \quad (0 < \varphi < \pi).$$
Верхняя граница для φ допускает существенное улучшение: в силу (4.95)
$$0 < \varphi < \frac{\pi}{n}.$$
Поэтому величины
$$\mu_{1,2}^n\left(\frac{h}{n}\right) = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$$
также невещественны, вопреки (4.94). Таким образом, случай, когда (4.32) выполняется в усиленной редакции (4.85), рассмотрен.

4.9. Для завершения доказательства теоремы (4.2) осталось обсудить две следующие возможности:

1) (4.32) выполнено со знаком $<$, но *supremum* левой части по t равен $\xi_n(a, h)$;

2) (4.32) выполнено со знаком $\leqslant$, причем $r(t)$ непрерывна.

Хотя остающаяся работа относится по существу к области «отделки», мы ради полноты доведем ее до конца. Из доказанного выше легко следует

Лемма 4.5. *Пусть неравенство* (4.32) *выполнено со знаком* $\leqslant$. *Тогда каждое нетривиальное решение уравнения* (4.69) *имеет не более одного нуля в полуинтервале* $[0, h)$.

В самом деле, пусть такое решение существует. Возвращаясь к уравнению с параметром (4.89) и используя те же соображения, что и выше, приходим к существованию подобного решения и у (4.89) при некотором $\gamma \in (0, 1)$. Но для функции $\tilde{r}(t) = \gamma r(t)$ мы находимся в условиях уже рассмотренного случая, т. к. в силу (4.32)

$$\tilde{r}\Big(t + \frac{h}{n}\Big) - \tilde{r}(t) = \gamma\Big[r\Big(t + \frac{h}{n}\Big) - r(t)\Big] \leqslant \gamma\xi_n(a, h) < \xi_n(a, h) \quad \Big(0 \leqslant t \leqslant \frac{n-1}{n}h\Big).$$

Полученное противоречие доказывает лемму 4.5.

Возвращаемся к возможностям 1), 2). Опять-таки будем вести доказательство от противного. Предположим, что в каком-либо из этих случаев (4.69) обладает решением $x(t)$ ($\not\equiv 0$), имеющим более одного нуля в $[0, h]$; без ограничения общности можно считать выполненными соотношения (4.88). Обозначим через t_0 точку максимума $x(t)$ в $[0, h]$ и вернемся к способу построения мажорантной функции $r_2(t)$ в нашей основной лемме 4.3[1].

При доказательстве леммы 4.3 функция $r_2(t)$ выбиралась совпадающей с $r_1(t)$ на каком-либо из полуинтервалов $(t_0 - l, t_0]$, $[t_0, t_0 + l)$, содержащемся в $[0, h]$. Последнее требование сейчас для нас неудобно. Чтобы избавиться от него, продолжим $r(t)$ вовне промежутка $[0, h]$, полагая

$$r(t) \equiv r(0)\ (t < 0), \quad r(t) \equiv r(h)\ (t > h).$$

Это позволит выбирать r_2 совпадающей с r на любом из полуинтервалов

$$\Big(t_0 - \frac{h}{n}, t_0\Big], \quad \Big[t_0, t_0 + \frac{h}{n}\Big) \tag{4.96}$$

по своему усмотрению.

Возможны два случая:

а) $r(t)$ имеет бесконечное число точек роста в промежутке $\Delta = \big[t_0 - hn^{-1}, t_0 + hn^{-1}\big]$;

б) $r(t)$ имеет в Δ конечное число точек роста (т. е. является ступенчатой).

С учетом возможностей 1), 2) получаем четыре случая — 1а, 2а, 1б, 2б. В частности, случай 2б означает, что $r(t)$ постоянна в Δ.

Начнем с вариантов 1а, 2а. Выберем мажорантную функцию совпадающей с $r(t)$ на том из полуинтервалов (4.96), который содержит бесконечное число точек роста $r(t)$. Вся остальная часть доказательства леммы остается прежней, причем сейчас $\xi = \xi_n(a, h)$. Таким образом, случай произвольной $r(t)$, для которой имеет место одна из возможностей 1а, 2а, удается свести к случаю, когда

$$r\Big(t + \frac{h}{n}\Big) - r(t) \equiv \xi_n(a, h)$$

и $r(t)$ имеет на каком-либо (а следовательно, и на любом) полуинтервале длины l бесконечное число точек роста. В дальнейших рассуждениях изменяется лишь одно

[1] r, x, hn^{-1} в наших теперешних обозначениях соответствуют r_1, x_1, l в обозначениях леммы.

место: строгий знак неравенства в (4.90) вытекает теперь не из неравенства (4.87) (обратившегося в равенство), а из второй части леммы 4.4.

То же рассуждение, проходит, кстати, и в случае б), если число точек роста $r(t)$ в каком-либо из полуинтервалов (4.90) не меньше 2; но поскольку это число может бить равным 0 или 1, воспользуемся здесь другим приемом, не связанным с леммой 4.3.

Пусть имеет место один из случаев 1б, 2б. Положим

$$r_\varepsilon(t) = r(t) \quad (t \leqslant t_0), \qquad r_\varepsilon(t) = r(t) + \varepsilon \quad (t > t_0)$$

и покажем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для функции $r_\varepsilon(t)$ сохраняется неравенство, аналогичное неравенству для $r(t)$:

$$f_\varepsilon(t) \overset{Df}{=} r_\varepsilon\Big(t + \frac{h}{a}\Big) - r_\varepsilon(t) \leqslant \xi_n(a,h) \quad \Big(0 \leqslant t \leqslant \frac{n-1}{n}h\Big). \tag{4.97}$$

Из определения $r_\varepsilon(t)$ непосредственно следует, что достаточно проверить это неравенство лишь для $t \in \big(t_0 - hn^{-1}, t_0\big]$, поскольку при других t $f_\varepsilon(t)$ совпадает с $f_0(t)$, т. е. с левой частью (4.32). Заметим, далее, что имеет место строгое неравенство

$$f_0(t) < 1 \quad \Big(t_0 - \frac{h}{n} \leqslant t \leqslant t_0\Big). \tag{4.98}$$

В варианте 1б (4.98) выполнено по условию, а в варианте 2б, как уже говорилось, $f_0(t) \equiv 0 \quad \big(t_0 - hn^{-1} \leqslant t \leqslant t_0\big)$.

Характерной чертой случая б) является конечнозначность (ступенчатость) $f_0(t)$ в промежутке $\big[t_0 - hn^{-1}, t_0\big]$, что позволяет переписать (4.98) в усиленной редакции:

$$f_0(t) \leqslant \mathrm{const} < 1 \quad \Big(t_0 - \frac{h}{n} \leqslant t \leqslant t_0\Big).$$

Поскольку $f_\varepsilon(t)$ при малых ε равномерно близки к $f_0(t)$, отсюда вытекает выполнение (4.97) при некотором $\varepsilon > 0$.

Зафиксируем такое ε и рассмотрим уравнение

$$\ddot{v} + \big[a^2 + \dot{r}_\varepsilon(t)\big]v = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant h). \tag{4.99}$$

Пусть $v(t)$ — решение этого уравнения, определяемое начальными условиями

$$v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = \dot{x}(0) \ (> 0)$$

(со стандартной для данного параграфа трактовкой, производной). Из определения $r_\varepsilon(t)$ явствует, что $v(t)$ легко выражается через решения исходного уравнения (4.69). Именно,

$$v(t) = \begin{cases} x(t) & (t \leqslant t_0), \\ x(t) - x_1(t) & (t > t_0), \end{cases} \tag{4.100}$$

где $x_1(t)$ — решение уравнения (4.69) такое, что

$$x_1(t_0) = 0, \quad \dot{x}_1(t_0) = \varepsilon x(t_0).$$

В силу (4.88) и разделения нулей, $x_1(t) > 0$ в $(t_0, h]$, откуда, учитывая (4.100), получаем

$$v(t) < x(t) \quad (t_0 < t \leqslant h).$$

Итак, согласно (4.88), $v(t)$ имеет нуль в $(t_0, h]$, так что уравнение (4.99) обладает нетривиальным решением $v(t)$, имеющим два нуля в полуинтервале $[0, h)$. Но это противоречит лемме 4.5, поскольку для $r_\varepsilon(t)$ выполнено соотношение (4.97).

Теорема 4.2, а вместе с ней и теорема 4.1 полностью доказаны.

4.10. В заключение сделаем несколько дополнительных замечаний.

Из доказательства нетрудно усмотреть, что экстремальными, «критическими» для теорем 4.1, 4.2 являются ступенчатые $r(t)$, испытывающие скачки постоянной величины $\xi_n(a, h)$ через равные промежутки длины h/n $(h = \omega)$. Другими словами, критический коэффициент $a^2 + \dot{r}(t)$ представляет собой сумму постоянной a^2 и «равноудаленных» друг от друга дельта-функций с множителем $\xi_n(a, h)$ (обстоятельство, которое, кстати, предугадать легче, чем обосновать). Можно показать также, что при любых a, n вид критической $r(t)$ определен однозначно, с точностью до сдвигов и до значений $r(t)$ в точках разрыва. Для этой цели нуждается в некотором усилении вторая часть леммы 4.4. Подробнее на этом не останавливаемся.

Стоит, может быть, ответить еще, что при любых $n > 1$ и $a \in \big[0, \pi h^{-1}\big)$ все решения уравнения (4.69) с критическим коэффициентом $a^2 + \dot{r}(t)$ $\big(\dot{r}(t + h) \equiv \dot{r}(t)\big)$ являются $2h$-периодическими, причем расстояния между соседними нулями любого нетривиального решения постоянны и равны h. В этом отношении такие уравнения вполне аналогичны уравнению $\ddot{x} + \pi^2 h^{-2} x = 0$.

В формулировке теоремы 4.1 фигурируют интегралы по отрезкам длины ω/n; аналогичный результат неулучшаемого характера может быть получен для отрезков произвольной длины l (интерес представляет, очевидно, лишь случай $0 < l \leqslant \omega/2$). Принципиальная сторона доказательства мало меняется, но из-за отсутствия простого равенства (4.91) формулировка и выкладки становятся весьма громоздкими.

Другое, столь же естественное, расширение формулировки теоремы 4.1 остается проблематичным. В этой теореме использовалась оценка (односторонняя) отклонения $q(t)$ от неотрицательной постоянной. При $n = 1$ аналогичный результат справедлив и для отрицательной постоянной: (4.18) может быть заменено условием

$$\int_0^\omega [q(t) + a^2]_+ dt \leqslant 2a \operatorname{cth} \frac{\omega a}{2} \quad \text{при некотором } a$$

(см. М. Г. Крейн [15], В. А. Якубович [16]). Имеют ли место подобные аналоги при $n \geqslant 2$, автору неизвестно.

Некоторые звенья проведенного выше доказательства пригодны и для отрицательной постоянной. Нетрудно проверить, в частности, что лемма 4.4 сохраняет силу для уравнения

$$\ddot{x} + \big[\dot{r}(t) - a^2\big] x = 0, \tag{4.101}$$

следует лишь заменить в (4.72) тригонометрические функции гиперболическими. Однако принцип сравнения, доставляемый леммой 4.2, к уравнению (4.101) непосредственно применить не удается.

2. УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА С ГЛАДКИМ ЯДРОМ И ОДНОМЕРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Об одном уравнении Фредгольма

1.1. В настоящем параграфе рассматривается уравнение

$$x(t) = \lambda \int_0^h K(t,s)x(s)\,d\mu(s). \tag{1.1}$$

Здесь $K(t,s)$ и $\mu(s)$ комплекснозначны, функция $\mu(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0,h]$, ядро $K(t,s)$ μ-измеримо при каждом фиксированном $t \in [0,h]$ и, кроме того, обладает определенным запасом гладкости по t, о чем будет идти речь ниже. Хорошо известно, что достаточно сильные требования гладкости ядра влекут за собой быстрый рост характеристических значений λ_k уравнения (1.1) и, соответственно, медленный рост при $\lambda \to \infty$ фредгольмовских рядов — числителя $D(t,s,\lambda)$ и знаменателя $D(\lambda)$. Ряд результатов такого рода изложен, в частности, в известных статьях Э. Хилле и Я. Д. Тамаркина [25], А. О. Гельфонда [24]. Этот круг вопросов непосредственно связан с некоторыми аспектами теории краевых задач для обыкновенного линейного дифференциального уравнения n-ого порядка ($n \geqslant 2$):

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = \lambda q(t)x \qquad (0 \leqslant t \leqslant h), \tag{1.2}$$

$$l_i[x] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Здесь $l_1, \ldots, l_n$ — линейные (и линейно независимые) функционалы в $C^{n-1}[0,h]$; $p_1, \ldots, p_n$, q — суммируемые в $[0,h]$ комплекснозначные функции, $q(t) \not\equiv 0$ в $[0,h]$. Задача (1.2)—(1.3), не имеющая $\lambda = 0$ собственным значением, эквивалентна уравнению (1.1), где $K(t,s)$ — функция Грина и $\mu(t) = \int_0^t q(s)\,ds$.

Вопросам роста собственных значений задачи (1.2)—(1.3), главным образом для случая двухточечных краевых условий, посвящено большое количество работ (по этому поводу см., например, [22], [23]). Типичный результат таков: при более или менее жестких дополнительных предположениях о структуре двухточечных краевых условий (регулярность и т. п.) и о функции $q(t)$ (часто предполагается, что $q \equiv const$) доказывается соотношение

$$\lambda_k \sim Ck^n \qquad (k \to \infty), \tag{1.4}$$

где постоянная C не зависит от k. Здесь и далее собственные значения занумерованы в порядке возрастания модулей ($0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$) и с учетом их кратности как корней $D(\lambda)$. Формула (1.4), показывающая, в частности, что скорость роста λ_k увеличивается с порядком уравнения, качественно согласуется с упомянутыми фактами теории интегральных уравнений, поскольку вместе с n возрастает и запас гладкости по t функции Грина. Остановимся подробнее на количественной стороне дела.

В плане общей теории уравнения (1.1) естественно отвлечься от такого специфического свойства функции Грина, как единичный скачок ее $n-1$-ой производной на диагонали $t=s$, и характеризовать запас гладкости в общих терминах. Ясно, что при таком подходе речь должна идти не о формулах типа (1.4), а лишь об оценках снизу для роста $|\lambda_k|$. Возникает естественный вопрос: можно ли на этом пути получить точную в смысле порядка роста оценку

$$|\lambda_k| \geqslant Ck^n \qquad (C>0;\ k=1,2,\ldots) \tag{1.5}$$

для существующих собственных значений задачи (1.2)—(1.3), а также соответствующую оценку $D(\lambda)$, $D(t,s,\lambda)$? Рассмотрим с этой точки зрения некоторые известные результаты. Теорема 1 статьи А. О. Гельфонда [24] утверждает, что при наличии у $K(t,s)$ r ограниченных производных по t порядок $D(\lambda)$ не превосходит $2/(2r+1)$ и λ_k растут быстрее, чем $k^{r+0.5-\varepsilon}$ при любом $\varepsilon>0$. Так как функция Грина задачи (1.2)—(1.3) дифференцируема по t в квадрате $0\leqslant t,s\leqslant h$ лишь $n-2$ раза, то для λ_k получаем оценку $|\lambda_k|>Ck^{n-1.5-\varepsilon}$, что далеко от (1.5). Правда, доказательство цитированной теоремы можно видоизменить таким образом, чтобы не использовать непрерывности $K^{(r)}(t,s)$ (дифференцирование здесь и далее — по первому аргументу). Поэтому теорема А. О. Гельфонда остается в силе, если требовать лишь, чтобы $K^{(r-1)}(t,s)$ удовлетворяла условию Липшица по t. Применительно к функции Грина задачи (1.2)—(1.3) это позволяет положить $r=n-1$, что дает более точные оценки: порядок $D(\lambda)$ не выше $2/(2n-1)$, $|\lambda_k|>Ck^{n-0.5-\varepsilon}$. Из результатов, изложенных в монографии И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [78, с. 157, 158], вытекает, в частности, что ε здесь является излишним. Остающийся зазор 0.5 уже не может быть, однако, ликвидирован на этом пути. Как выяснилось, ключевым здесь является то обстоятельство, что $n-1$-ая производная функции Грина не только ограничена, но и имеет ограниченную вариацию по t. Уравнения с ядрами, обладающими таким запасом гладкости, ранее рассматривались (для случая $d\mu=dt$) в работе Э. Хилле и Я. Д. Тамаркина [25] и получили оценку:

$$|\lambda_k| \geqslant \frac{Ck^n}{(\ln k)^{n-0.5}} \qquad (k=1,2,\ldots), \tag{1.6}$$

что уже близко к требуемому. Непосредственными оценками фредгольмовских рядов авторы [25] не занимались. Данный класс ядер рассматривался в [25] наряду с другими, и его связь с краевыми задачами не затрагивалась.

В настоящем параграфе будет доказано предложение об уравнениях с ядрами этого типа, содержащее, в частности, оценку (1.5). Таким образом, мы освободимся от логарифмического множителя в (1.6) (такая возможность была высказана Хилле и Тамаркиным [25] в качестве гипотезы). Отметим, что, хотя теорема 1 из [24] мало приспособлена для ядер типа функций Грина, другие моменты этой статьи А. О. Гельфонда, в первую очередь построения, связанные с теоремой 13, будут для нас весьма полезны.

Два других параграфа посвящены дифференциальным уравнениям. В § 2 изучаются свойства функции Грина краевой задачи (1.2)—(1.3) — гладкость по t (обеспечивающая применимость теоремы 1.1), непрерывность и гладкость по s, поведение вблизи концов промежутка, представляющее интерес для сингулярных задач.

Интерполяционные краевые задачи и связанные с ними вопросы распределения нулей, главным образом для уравнения $x^{(n)}+q(t)x=0$, рассматриваются в § 3. В частности, опираясь на формулу следов (обоснованную ранее) и важные результаты

Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна в теории т. н. осцилляционных ядер [29–31], мы получим для двухчленного уравнения интегральный признак неосцилляции точного характера.

1.2. Подчиним ядро $K(t,s)$ уравнения (1.1) следующим требованиям (вариация, как и дифференцирование, — по первому аргументу):

$$|K(t,s)| \leqslant g(s), \tag{1.7}$$

$$V_0^h K^{(m)}(t,s) \leqslant g(s) \tag{1.8}$$

для некоторого $m \geqslant 1$, где $g(s)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^h g(s)|d\mu(s)| \leqslant C_0 < \infty. \tag{1.9}$$

Соотношения (1.7), (1.8) должны выполняться почти при всех s по μ-мере (далее эта оговорка часто опускается). Непрерывности $K^{(m)}(t,s)$ по t не требуется; можно считать ее, скажем, кусочно-непрерывной, доопределенной в точках разрыва по непрерывности справа. Не предполагается также непрерывности $K(t,s)$ по s.

Теорема 1.1. *При допущенных предположениях числитель $D(t,s,\lambda)$ (почти при всех s по μ-мере) и знаменатель $D(\lambda)$ резольвенты Фредгольма для уравнения* (1.1) *являются целыми функциями λ порядка не выше $\dfrac{1}{m+1}$, так что, в частности,*

$$D(\lambda) = \prod_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right), \tag{1.10}$$

где произведение берется по всем существующим характеристическим значениям λ_k. Для последних справедливо неравенство

$$|\lambda_k| \geqslant Ck^{m+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.11}$$

где

$$C = C_0^{-1} f(m,h) > 0. \tag{1.12}$$

Как уже говорилось, λ_k нумеруются в порядке возрастания модулей с учетом кратности.

Доказательство теоремы состоит из нескольких этапов. Вначале для $K(t,s)$ будет построено разложение

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\psi_k(s), \tag{1.13}$$

которое достаточно быстро сходится (в определенном смысле). Затем разложение (1.13) используется для получение нужных оценок $D(t,s,\lambda)$, $D(\lambda)$. Наконец, из оценки $D(\lambda)$ выводится с помощью неравенства Йенсена соотношение (1.11).

Поскольку выражение (1.12) для C представляет интерес с точки зрения приложений, мы уделяем внимание получению необходимых для этой цели промежуточных оценок. Если интересоваться лишь существованием оценки (1.11) с какой-то постоянной C, зависящей, возможно, и от других характеристик ядра, доказательство можно было бы сократить.

1.3. Построение разложения (1.13) состоит из нескольких моментов. План таков: мы представим $K(t,s)$ в виде

$$K(t,s) = K_0(t,s) + K_1(t,s), \tag{1.14}$$

где ядро $K_0(t,s)$ вырождено, а $K_1(t,s)$ представляет собой «периодизированное» ядро в том смысле, что

$$K_1^{(i)}(0,s) \equiv K_1^{(i)}(h,s), \quad i = 0,1,\ldots,m \quad (0 \leqslant s \leqslant h). \tag{1.15}$$

Затем $K_1(t,s)$ при каждом фиксированном s будет разложено в ряд Фурье по тригонометрической системе $\{e^{2\pi inh^{-1}t}\}$; при этом соотношения (1.15) обеспечат нужную скорость убывания коэффициентов Фурье.

По соображениям однородности достаточно ограничиться случаем $C_0 = 1$. Итак, вместо (1.9) в дальнейшем предполагается, что

$$\int\limits_0^h g(s)|d\mu(s)| \leqslant 1. \tag{1.16}$$

Постоянная C в оценке (1.11) должна теперь зависеть лишь от m и h.

Пусть в (1.14) ядро $K_0(t,s)$ как функция t будет многочленом степени не выше $m+1$. Это дает для $K_0(t,s)$ следующее выражение

$$K_0(t,s) = \sum_{r=0}^{m} \frac{h^r}{(r+1)} \left[K^{(r)}(h,s) - K^{(r)}(0,s)\right] B_{r+1}\left(\frac{t}{h}\right), \tag{1.17}$$

где $B_k(t)$ — k-ый многочлен Бернулли, т. е. многочлен $B_k(t)$ $(= t^k + \ldots)$ такой, что

$$\frac{ze^{tz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} z^n \quad (B_k^{(i)}(0) = B_k^{(i)}(1) \text{ при } i \neq k-1).$$

Из (1.17) следует, что ядро $K_1 = K - K_0$ удовлетворяет условиям (1.15).

Для оценки слагаемых, входящих в ядро K_0, нам понадобится следующее вспомогательное неравенство.

1.4.

Лемма 1.1. *Пусть функция $u(t)$ удовлетворяет при некотором $m \geqslant 1$ условиям*

$$|u(t)| \leqslant \alpha, \quad |u^{(m)}(t) - u^{(m)}(t_1)| \leqslant \beta \qquad (0 \leqslant t, t_1 \leqslant h). \tag{1.18}$$

Тогда при любом k $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$ имеет место неравенство

$$|u^{(k)}(t)| \leqslant 2^{2k-1} \frac{(k-1)!(m+k-1)!}{(2k-1)!(m-k)!} \left[\frac{m\alpha}{h^k} + \frac{\beta h^{m-k}}{(m-1)!}\right] \quad (0 \leqslant t \leqslant h). \tag{1.19}$$

Относительно гладкости $u(t)$ предполагается, что $u^{(m-1)}$ абсолютно непрерывна в $[0,h]$; второе из неравенств (1.18) должно выполняться для тех t, t_1, где $u^{(m)}$ существует. Лемма 1.1, очевидно, имеет некоторое сходство с известными оценками промежуточных производных Колмогорова – Горни [79], [80], в отличие от которых здесь задается не $\max|u^{(m)}(t)|$, а $\max|u^{(m)}(t)-u^{(m)}(t_1)|$. Наша оценка ближе к результату Горни, поскольку речь идет о конечном промежутке. Правая часть (1.19) не является точной. Отметим, впрочем, что при небольших h, несмотря на меньшую ограничительность нашего условия (сравнительно с условием $|u^{(m)}|\leqslant\beta/2$), (1.19) точнее соответствующей оценки Горни.

Докажем лемму. Пусть t_0 — произвольная точка отрезка $[0,h]$ такая, что $u^{(m)}(t_0)$ существует. Положим

$$p(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}u^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k, \qquad v(t)=u(t)-p(t).$$

Так как

$$v(t_0)=\dot v(t_0)=\ldots=v^{(m)}(t_0)=0$$

и почти при всех $t\in[0,h]$

$$|v^{(m)}(t)|=|v^{(m)}(t)-v^{(m)}(t_0)|=|u^{(m)}(t)-u^{(m)}(t_0)|\leqslant\beta,$$

то

$$|v(t)|=\frac{1}{(m-1)!}\left|\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{m-1}v^{(m)}(s)\,ds\right|\leqslant\frac{1}{m!}\beta h^m \qquad (0\leqslant t\leqslant h).$$

Отсюда

$$|p(t)|\leqslant|u(t)|+|v(t)|\leqslant\alpha+\frac{1}{m!}\beta h^m \qquad (0\leqslant t\leqslant h). \tag{1.20}$$

Степень многочлена $p(t)$ не превышает m. В силу известного неравенства В. А. Маркова [81] из (1.20) заключаем, что при любом k, $1\leqslant k\leqslant m-1$,

$$|p^{(k)}(t)|\leqslant 2^{2k-1}\frac{(m+k-1)!(k-1)!m}{(m-k)!(2k-1)!}\left(\alpha+\frac{1}{m!}\beta h^m\right)h^{-k} \qquad (0\leqslant t\leqslant h). \tag{1.21}$$

Это неравенство справедливо, в частности, и при $t=t_0$; поэтому левая часть может быть заменена на $u^{(k)}(t_0)$ $(=p^{(k)}(t_0))$. Далее, т. к. t_0 — произвольная точка дифференцируемости $u^{(m-1)}(t)$, а множество таких точек всюду плотно в $[0,h]$, то оценка (1.21), ввиду непрерывности $u^{(k)}(t)$, останется в силе, если заменить левую часть на $u^{(k)}(t)$. Лемма доказана.

1.5. Применим лемму 1.1 к производным $K^{(r)}(t,s)$ при фиксированном s. Так как, согласно (1.8),

$$|K^{(m)}(t,s)-K^{(m)}(t_1,s)|\leqslant V_0^hK^{(m)}(t,s)\leqslant g(s) \qquad (0\leqslant t,t_1,s\leqslant h), \tag{1.22}$$

то для любого r, $1\leqslant r\leqslant n-1$, и любого $s\in[0,h]$ имеем

$$\begin{aligned}|K^{(r)}(h,s)-K^{(r)}(0,s)|&\leqslant 2\max_{0\leqslant t\leqslant h}|K^{(r)}(t,s)|\leqslant\\&\leqslant 4^r\frac{(m+r-1)!(r-1)!}{(m-r)!(2r-1)!}\left[mh^{-r}+\frac{1}{(m-1)!}h^{m-r}\right]g(s).\end{aligned} \tag{1.23}$$

Положим

$$b_i=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}B_i(t), \qquad i=1,2,\ldots \tag{1.24}$$

(в частности, $b_1 = \dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{6}$, $b_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{36}$, $b_4 = \dfrac{1}{30}$ и т. д.).

Полагая, далее,

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{b_k} B_k\left(\frac{t}{h}\right), \quad \psi_k(s) = \frac{b_k h^{k-1}}{k!}\left[K^{(k-1)}(h,s) - K^{(k-1)}(0,s)\right], \qquad k = 1,\ldots,m+1, \quad (1.25)$$

перепишем (1.17) в виде

$$K_0(t,s) = \sum_{k=1}^{m+1} \varphi_k(t)\psi_k(s). \quad (1.26)$$

Здесь функции φ_k, ψ_k удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi_k(t)| \leqslant 1, \qquad k = 1,2,\ldots,m+1 \qquad (0 \leqslant t \leqslant h), \quad (1.27)$$

$$|\psi_k(s)| \leqslant \varepsilon_k g(s), \qquad k = 1,2,\ldots,m+1 \qquad (0 \leqslant s \leqslant h). \quad (1.28)$$

где

$$\varepsilon_1 = 1, \quad (1.29)$$

$$\varepsilon_k = \frac{4^{k-1}b_k}{k(k-1)} C_{m+k-2}^{2k-3}\left[m + \frac{h^m}{(m-1)!}\right], \qquad k = 2,3,\ldots,m, \quad (1.30)$$

$$\varepsilon_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!} b_{m+1} h^m. \quad (1.31)$$

Справедливость (1.28) при таких ε_k вытекает из (1.7), (1.22), (1.23).

1.6. Перейдем теперь к ядру $K_1(t,s)$. Прежде всего оценим $V_0^h K_1^{(m)}(t,s)$. Учитывая тот факт, что $K_0^{(m)}(t,s)$ есть линейная функция t, а также соотношения (1.8), (1.14) и (1.15) (при $i = m$), находим:

$$V_0^h K_1^{(m)}(t,s) \leqslant V_0^h K^{(m)}(t,s) + V_0^h K_0^{(m)}(t,s) \leqslant g(s) + |K_0^{(m)}(h,s) - K_0^{(m)}(0,s)| = \\ = g(s) + |K^{(m)}(h,s) - K^{(m)}(0,s)| \leqslant g(s) + V_0^h K^{(m)}(t,s) \leqslant 2g(s). \quad (1.32)$$

Разложим $K_1(t,s)$ при каждом фиксированном s в ряд Фурье:

$$K_1(t,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(s) e^{2\pi i n h^{-1} t} \qquad (0 \leqslant t \leqslant h). \quad (1.33)$$

Учитывая (1.15), (1.32), воспользуемя известной (см., например, [82]) оценкой коэффициентов Фурье «периодизированных» функций, имеющих m-ую производную ограниченной вариации. Это дает

$$|\gamma_r(s)| \leqslant \frac{2g(s)h^m}{|2\pi r|^{m+1}} \qquad (r = \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad (1.34)$$

Что касается коэффициента $\gamma_0(s)$, то

$$\gamma_0(s) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h K_1(t,s)\,dt = \frac{1}{h}\int\limits_0^h K(t,s)\,dt. \tag{1.35}$$

Действительно, т. к. для каждого из многочленов Бернулли $B_k(t)$ при $k \geqslant 1$ среднее значение на $[0,1]$, как известно (см. [83]), равно нулю, то

$$\int\limits_0^h [K(t,s) - K_1(t,s)]\,dt = \int\limits_0^h K_0(t,s)\,dt = 0$$

для почти всех (по μ-мере) s из $[0,h]$. Отсюда вытекает (1.35), что вместе с (1.7) дает

$$|\gamma_0(s)| \leqslant \frac{g(s)}{h}. \tag{1.36}$$

Для того чтобы получить разложение $K(t,s)$ в форме (1.13), достаточно теперь распорядиться соответствующими обозначениями, положив

$$\varphi_{m+2r+2}(t) = e^{-2\pi i r h^{-1} t}, \qquad \psi_{m+2r+2} = \gamma_{-r}(s) \qquad (r = 0, 1, \ldots),$$

$$\varphi_{m+2r+1}(t) = e^{2\pi i r h^{-1} t}, \qquad \psi_{m+2r+1} = \gamma_r(s) \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Неравенство (1.27) распространяется, очевидно, на все φ_k:

$$|\varphi_k(t)| \leqslant 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad (0 \leqslant t \leqslant h). \tag{1.37}$$

Для всех ψ_k имеют место неравенства типа (1.28):

$$|\psi_k(s)| \leqslant \varepsilon_k g(s), \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad (0 \leqslant s \leqslant h). \tag{1.38}$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m+1}$ даются соотношениями (1.29), (1.30), (1.31), а при $k \geqslant m+2$ числа ε_k в силу (1.34), (1.36) можно определить следующим образом:

$$\varepsilon_{m+2} = \frac{1}{h}; \qquad \varepsilon_{m+2r+1} = \varepsilon_{m+2r+2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \frac{1}{r^{m+1}}, \qquad r = 1, 2, \ldots \tag{1.39}$$

Так как по предположению $m \geqslant 1$, то почти при любом фиксированном s ряд в правой части (1.13) абсолютно и равномерно сходится к $K(t,s)$.

1.7. Переходим ко второму этапу — использованию полученного разложения $K(t,s)$ для оценок $D(\lambda)$, $D(t,s,\lambda)$, λ_k. Будем действовать по схеме, изложенной в конце статьи А. О. Гельфонда [24], с теми изменениями, которые обусловлены иными, по сравнению с [24], оценками для φ_k, ψ_k.

Рассмотрим определитель

$$\Delta = \Delta(t_1, \ldots, t_n; s_1, \ldots, s_n) = \det \|K(t_i, s_j)\|_1^n.$$

Подставляя вместо $K(t,s)$ его выражение в виде ряда (1.13), убеждаемся, что

$$\Delta = \det(AB),$$

где бесконечные прямоугольные матрицы A, B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_n) & \varphi_2(t_n) & \dots \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \psi_1(s_1) & \psi_1(s_2) & \dots & \psi_1(s_n) \\ \psi_2(s_1) & \psi_2(s_2) & \dots & \psi_2(s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Отсюда по формуле Бине – Коши

$$\Delta = \sum_{1 \leqslant r_1 < \ldots < r_n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

Здесь использованы обычные обозначения для миноров матриц A, B (см., например, [84]). Бесконечность матриц A, B несущественна, поскольку ряд (1.40), как будет видно из дальнейшего, абсолютно сходится.

В силу (1.37) и неравенства Адамара

$$\left| A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \right| \leqslant n^{n/2}. \tag{1.41}$$

Далее,

$$B \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \det \|\psi_{r_i}(s_j)\|_1^n = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\dots\varepsilon_{r_n} g(s_1)g(s_2)\dots g(s_n) \det \left\| \frac{\psi_{r_i}(s_j)}{\varepsilon_{r_i} g(s_j)} \right\|.$$

Элементы последнего определителя ввиду (1.38) не превосходят единицы по модулю; поэтому, в силу того же неравенства Адамара,

$$\left| B \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \right| \leqslant n^{n/2} \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\dots\varepsilon_{r_n} g(s_1)g(s_2)\dots g(s_n). \tag{1.42}$$

Комбинируя (1.40), (1.41) и (1.42), находим:

$$|\Delta(t_1, \dots, t_n; s_1, \dots, s_n)| \leqslant n^n g(s_1)g(s_2)\dots g(s_n) \sum_{1 \leqslant r_1 < \ldots < r_n} \varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\dots\varepsilon_{r_n}. \tag{1.43}$$

1.8. Последнее неравенство непосредственно приводит к оценкам $D(\lambda)$, $D(t, s, \lambda)$. Действительно, интегрируя (1.43) с учетом (1.16), имеем

$$\Bigl| \underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n} \Delta(s_1, \dots, s_n; s_1, \dots, s_n)\, d\mu(s_1), \dots, d\mu(s_n) \Bigr| \leqslant n^n \sum_{r_1 < \ldots < r_n} \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_n}, \tag{1.44}$$

$$\Bigl| \underbrace{\int_0^h \dots \int_0^h}_{n} \Delta(t, s_1, \dots, s_n; s_1, \dots, s_n)\, d\mu(s_1), \dots, d\mu(s_n) \Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)^{n+1} \sum_{r_1 < \ldots < r_{n+1}} \varepsilon_{r_1} \dots \varepsilon_{r_{n+1}}. \tag{1.45}$$

Пусть $|\lambda| = \rho$. Учитывая (1.44) и неравенство $n^n < e^n n!$, находим

$$|D(\lambda)| \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^n \rho^n \sum_{r_1 < \ldots < r_n} \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + e\varepsilon_n \rho). \tag{1.46}$$

Согласно (1.39), $\varepsilon_n = O(n^{-m-1})$ при $n \to \infty$. Отсюда в силу известной теоремы о росте бесконечных произведений (см., например, [85]) следует, что порядок правой части (1.46) (рассматриваемой как целая функция от ρ) не превосходит $1/(m+1)$. То же самое справедливо поэтому и для $D(\lambda)$.

Сходным образом оценивается $D(t,s,\lambda)$. Вместо e здесь удобно ввести другую постоянную

$$e_+ = \max_{k \geqslant 1} \frac{k}{\sqrt[k]{(k-1)!}} \quad \left(= \frac{17}{\sqrt[17]{16!}} \approx 2.798 \right).$$

Поскольку $(n+1)^{n+1} \leqslant e_+^{n+1} n!$ и, согласно (1.13), (1.37), (1.38),

$$|K(t,s)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(s)| \leqslant g(s) \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n, \tag{1.47}$$

то (1.45) приводит к следующей оценке:

$$|D(t,s,\lambda)| \leqslant \frac{g(s)}{\rho} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 + e_+ \varepsilon_n \rho) - 1 \right] \qquad (\rho = |\lambda|). \tag{1.48}$$

В силу (1.9) $g(s) < \infty$ почти при всех s (по μ-мере). Поэтому порядок $D(t,s,\lambda)$ также не превосходит $1/(m+1)$ почти при всех s из $[0,h]$.

Поскольку порядок $D(\lambda)$ меньше 1, то в силу известной теоремы Адамара (см. [85]) для $D(\lambda)$ имеет место разложение (1.10).

1.9. Нам осталось получить оценку (1.11) для $|\lambda_k|$. Так как $D(0) = 1$, то (1.46) в сочетании с неравенством Иенсена дает [86]:

$$\frac{1}{|\lambda_k|^k} \leqslant \frac{1}{\rho^k} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + e\varepsilon_k \rho)$$

для каждого существующего нуля λ_k функции $D(\lambda)$ (при соответствующей нумерации) и любого $\rho > 0$. Полагая $\rho = \nu k^{m+1}$, где $\nu > 0$ — произвольный параметр, получаем

$$|\lambda_k| \geqslant C_k k^{m+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{1.49}$$

где

$$C_k = C_k(m,h,\nu) = \nu \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \nu e \varepsilon_n k^{m+1}) \right]^{-1/k}. \tag{1.50}$$

(Напомним, что все ε_n выражаются через m, h.) Неравенство (1.49), справедливое для всех существующих λ_k, фактически и доставляет нужную нам оценку (1.11). В самом деле, зависимость C_k от ν, очевидно, не имеет значения, поскольку ν можно зафиксировать, положив, например, $\nu = 1$. Также и зависимость C_k от k в конечном счете несущественна, поскольку

$$f(m,h,\nu) \overset{Df}{=} \inf_{k \geqslant 1} C_k > 0. \tag{1.51}$$

Действительно, при любом натуральном m, как известно,

$$\ln\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+a\left(\frac{k}{n}\right)^{m+1}\right]\right| = O(k) \qquad (k\to\infty). \tag{1.52}$$

(Для получения (1.52) достаточно положить $k^{m+1}=z$ и оценить каноническое произведение стандартным способом, см. [85].) Из (1.39) и (1.52) непосредственно вытекает (1.51).

Теорема 1.1 полностью доказана.

1.10. Несколько слов о количественной стороне дела. Как уже говорилось, в смысле порядка роста все полученные оценки носят точный характер, о чем свидетельствуют примеры функций Грина подходящих краевых задач (см. § 2). Однако значение коэффициентов C_k, доставляемое формулой (1.50), может уточняться различными способами. Прежде всего, свободным параметром ν естественно распорядиться так, чтобы максимизировать величину C_k. Для каждого фиксированного k возникает своя экстремальная задача, не допускающая, вообще говоря, явного аналитического решения. Последнее становится возможным, если поставить целью выбор ν, не зависящего от k и притом оптимального асимптотически, при $k\to\infty$. Здесь следует воспользоваться тем обстоятельством, что бесконечное произведение в правой части (1.50) преобразуется к конечному выражению. Ответ, вообще говоря, выражается через Г-функцию (см. [83]), так что надлежит еще прибегнуть к формуле Стирлинга. Наличие в произведении, входящем в правую чать (1.50), $m+2$ «неправильных» сомножителей, очевидно, теряет значение при $k\to\infty$. Коснемся здесь лишь простейшего случая $m=1$. Учитывая (1.39) и равенство

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s^2}{n^2}\right)=\frac{\operatorname{sh}(\pi s)}{\pi s},$$

находим с помощью элементарных вычислений, что при $k\to\infty$ лучшее из (фиксированных) значений ν есть

$$\nu=\frac{2}{eh}.$$

Другое соображение, влияющее, главным образом, на значения C_k при малых k, состоит в том, что оценка (1.46) величины $D(\lambda)$ без труда может быть несколько улучшена. С этой целью заметим следующее. Для получения оценки в удобной форме мы использовали неравенство (1.44) при всех значениях n, в том числе и при $n=1$, когда оно принимает вид

$$\left|\int_0^h K(s,s)\,d\mu(s)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i. \tag{1.53}$$

Однако из (1.7), (1.16) непосредственно следует, что левая часть не превосходит 1 $\left(\leqslant \sum\limits_1^{\infty}\varepsilon_i\right)$. Поэтому в (1.46) можно внести соответствующую поправку:

$$|D(\lambda)| \leqslant \prod_{n=1}^{\infty}(1+e\varepsilon_n\rho) - e\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n - 1\right) \qquad (|\lambda|=\rho).$$

Тем самым несколько уточняются и оценки для $|\lambda_k|$. Мы не останавливаемся более на подобных усовершенствованиях, имеющих ограниченный интерес. Стоит лишь отметить, что пользоваться формулой (1.50) при $k = 1$ нецелесообразно, т. к. для λ_1 справедлива тривиальная и в то же время точная оценка $|\lambda_1| \geqslant 1$, непосредственно вытекающая из (1.7), (1.16) и общеизвестного [28] способа оценки сверху спектрального радиуса (равного λ_1^{-1}).

До сих пор предполагалось, что в (1.9) $C_0 = 1$; в противном случае в оценках для λ_k появится, очевидно, дополнительный множитель C_0^{-1}.

1.11.

Следствие 1.1. *В условиях теоремы 1.1 справедлива формула следов:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \int_0^h K(s,s)\,d\mu(s). \tag{1.54}$$

Это вытекает из (1.10), если приравнять коэффициенты при λ. Следует отметить, что соотношения (1.10), (1.54) могли быть получены также на основе теоремы 1 упоминавшейся уже работы А. О. Гельфонда [24]. В самом деле, для (1.10) не нужна точная оценка порядка $D(\lambda)$; достаточно лишь убедиться, что этот порядок меньше 1. При $m \geqslant 2$ теорема 1 из [24] непосредственно дает требуемое, а при $m = 1$ должна быть применена модификация этой теоремы, о которой говорилось в начале данного параграфа. Кстати, сочетая эту модификацию с неравенством Хилле – Тамаркина (1.6), можно получить и точную оценку порядка $D(\lambda)$, содержащуюся в теореме 1.1 (правда, при несколько более ограничительных предположениях). Поэтому центральным моментом теоремы 1.1 следует, видимо, считать оценку (1.11)—(1.12).

1.12. В заключение сделаем еще несколько замечаний по поводу теоремы 1.1.

Требование

$$|K(t,s)| \leqslant g(s), \text{ где } \int_0^h g(s)\,|d\mu(s)| < \infty, \tag{1.55}$$

можно было бы заменить требованием

$$\int_0^h \int_0^h |K(t,s)|\,dt\,|d\mu(s)| < \infty, \tag{1.56}$$

которое, хотя и выглядит более общим, в действительности эквивалентно условию вида (1.55) в силу ограниченности вариации $K(t,s)$ по t. В самом деле, пусть наряду с (1.8), (1.9) выполнено (1.56). Имеем

$$f(s) \overset{Df}{=} \max_{0\leqslant\tau\leqslant h} |K(\tau,s)| \leqslant |K(t,s)| + g(s) \qquad (0 \leqslant t, s \leqslant h),$$

откуда, интегрируя по t, s и учитывая (1.9), (1.56), находим

$$h\int_0^h f(s)\,|d\mu(s)| \leqslant \int_0^h\int_0^h |K(t,s)|\,dt\,|d\mu(s)| + h\int_0^h g(s)\,|d\mu(s)| < \infty.$$

После замены $g(s)$ на $g_1(s) = \max\{f(s), g(s)\}$ придем к условиям прежнего вида. Очевидно также, что в (1.56) можно заменить dt на $|d\mu(t)|$.

Так как нигде не требовалась суммируемость $K(t,s)$ с квадратом, может создаться впечатление, что рассматриваемые интегральные операторы выходят за рамки класса Гильберта – Шмидта. По существу это не так, хотя в пространстве $L_2[0,h]$ с мерой $|d\mu(s)|$ наш оператор, действительно, не является даже непрерывным (если $g(s)$ не принадлежит этому пространству). Дело сводится к «замене переменной». Именно, в качестве основного пространства выберем $L_2[0,h]$ с мерой $|d\widetilde{\mu}(s)| = g(s)|d\mu(s)|$. После переброски множителя $g(s)$ на меру новое ядро $\widetilde{K}(t,s) = \dfrac{1}{g(s)}K(t,s)$ рассматриваемого оператора станет даже ограниченным. Собственные функции нашего оператора, будучи непрерывными, принадлежат $L_2[0,h]$ с любой конечной мерой, так что фредгольмовские ряды сохраняют свою обычную роль[1]. Данную замену меры можно было осуществить и при доказательстве теоремы 1.1, что несколько упростило бы часть выкладок.

Отметим, наконец, что примененный выше способ пригоден также для оценки s-чисел (см. [78]) интегрального оператора с ядром данной гладкости в соответствующем функциональном пространстве. Подробнее на этом не останавливаемся.

§ 2. О функциях Грина одномерных краевых задач

2.1. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые структурные свойства функций Грина несингулярных краевых задач для уравнения n-го порядка ($n \geqslant 2$). Каждая такая задача имеет вид

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = f(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{2.1}$$

$$l_i[x] = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{ik}x^{(k)}(a) + \int_a^b x^{(n-1)}(t)\,dg_i(t) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Здесь $p_1(t), \ldots, p_n(t), f(t)$ суммируемы на $[a,b]$; $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ имеют ограниченные вариации на $[a,b]$ и непрерывны справа внутри (a,b). Все функции и постоянные α_{ij} являются, вообще говоря, комплекснозначными. Функционалы (2.2), естественно, предполагаются линейно независимыми в $C^{n-1}[a,b]$.

Вид краевых условий (2.2) является удобным для исследования и в то же время вполне общим, поскольку такое представление допускают любые линейные функционалы в пространстве $C^{n-1}[a,b]$. (Абсолютная непрерывность $x^{(n-1)}(t)$ фактически не расширяет класса краевых условий, поскольку $x^{(n)}$ в силу (2.1) линейно выражается через $x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}$.) Чтобы привести произвольные краевые условия к виду (2.2), следует воспользоваться формулами

$$x^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^{n-i-2} \frac{1}{k!}x^{(i+k)}(a)(t-a)^k + \frac{1}{(n-i-2)!}\int_a^t (t-s)^{n-2-i}x^{(n-1)}(s)\,ds, \ i = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Подставляя эти выражения для $x^{(i)}$ в краевые условия и меняя порядок интегрирования в интегральных членах, содержащих $x^{(i)}$, придем к условиям в форме (2.2).

[1] В частности, нули $D(\lambda)$ совпадают с собственными значениями оператора в минус первой степени, см. [87].

Далее предполагается, что задача (2.1)—(2.2) не вырождена, т. е. что уравнение $Lx = 0$ не имеет нетривиальных решений, удовлетворяющих условиям (2.2). В этом случае существует функция Грина $G(t,s)$ задачи (2.1)—(2.2), с помощью которой решение этой задачи при любой $f(t)$ записывается в виде

$$x(t) = \int\limits_a^b G(t,s)f(s)\,ds. \tag{2.3}$$

Остановимся подробнее на свойствах $G(t,s)$ как функции двух переменных.

2.2. Из нескольких эквивалентных аналитических представлений $G(t,s)$ для наших целей наиболее удобно следующее:

$$\begin{aligned} G(t,s) &= H(t,s) - \sum_{i=1}^n y_i(t) l_i[H(t,s)] = \\ &= H(t,s) - \sum_{i=1}^n y_i(t) \int\limits_s^b Y^{(n-1)}(\tau,s)\,dg_i(\tau) \quad (a \leqslant t \leqslant b,\ a < s < b). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Обозначения здесь таковы: $\{y_i(t)\}$ — фундаментальная система решений уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющая условиям

$$l_i[y_i] = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\ldots,n, \tag{2.5}$$

(поскольку задача не вырождена, такая система, очевидно, существует); $Y(t,s)$ как функция t есть решение уравнения $Ly = 0$ такое, что

$$Y^{(i)}(t,s)\big|_{t=s} = \delta_{i,n-1}, \qquad i = 0,1,\ldots,n-1. \tag{2.6}$$

Здесь и всюду далее, где используется краткая запись производных, имеется в виду дифференцирование по первому аргументу. Наконец, $H(t,s)$ — функция Коши оператора L, т. е. $H(t,s) = 0$ при $t \leqslant s$ и $H(t,s) = Y(t,s)$ при $t > s$. В выражениях

$$l_i[H(t,s)], \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{2.7}$$

s понимается как параметр.

Пусть
$$\Omega = \Omega(g_1,\ldots,g_n)$$

есть множество точек интервала (a,b), в которых хотя бы одна из функций $g_1(t),\ldots,g_n(t)$ испытывает разрыв. Так как все g_k имеют ограниченную вариацию, Ω содержит не более счетного числа точек. Нетрудно видеть, что при $s \in \Omega$ некоторые из величин (2.7) теряют смысл, поскольку $H(t,s)$ не имеет $n-1$-ой производной на диагонали $t = s$. Поэтому и равенства (2.4) вполне корректны лишь при $s \notin \Omega$; в противном случае выражение, стоящее в центре, не определено. Ясно, однако, что тот или иной способ доопределения $G(t,s)$ на конечном или счетном множестве прямых вида $s = s_i$ ($s_i \in \Omega$) не может повлиять на справедливость формулы (2.3). Поэтому можно считать, что при всех $s \in (a,b)$ $G(t,s)$ совпадает с правой частью (2.4).

Как легко понять, «неопределенность» $G(t,s)$ на прямых $s = s_i \in \Omega$ обусловлена тем фактом, что $G(t,s)$ испытывает скачок по s на этих прямых. Мы вернемся к этому позднее, когда будем характеризовать $G(t,s)$ как функцию s.

Нетрудно видеть, что $G(t,s)$, определенная формулой (2.4), действительно есть функция Грина нашей задачи, т. е. что при любой $f(t)$ решение задачи (2.1)—(2.2) дается формулой (2.3). Для проверки этого, как и обычно, существенно следующее:

а) при любом фиксированном $s \in (a,b)$ $G(t,s)$ удовлетворяет уравнению $LG = 0$ в полуинтервалах $a \leqslant t < s$, $s < t \leqslant b$;

б) $G^{(i)}(t,s)\big|_{t=s+0} - G^{(i)}(t,s)\big|_{t=s-0} = \delta_{i,n-1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$;

в) почти при всех $s \in (a,b)$ (точнее, при всех $s \in (a,b) \setminus \Omega$) $G(t,s)$ как функция t удовлетворяет краевым условиям (2.2).

Эти факты, а с их помощью и формула (2.3) проверяются без труда.

2.3. Положим

$$z_i(s) = \int_s^b Y^{(n-1)}(t,s)\,dg_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (a < s < b), \tag{2.8}$$

$$F(t,s) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t) z_i(s). \tag{2.9}$$

Согласно (2.4)

$$G(t,s) = H(t,s) - F(t,s), \tag{2.10}$$

т. е. функция Грина представима в виде суммы вольтерровского (притом достаточно гладкого) ядра H и вырожденного n-мерного ядра F. Это известное специфическое структурное свойство функций Грина одномерных краевых задач полезно во многих вопросах. В частности, оно может быть положено в основу иного, чем тот, который был развит в § 1 (и базировался на запасе гладкости ядра), подхода к исследованию фредгольмовских рядов соответствующего интегрального уравнения. Подробнее на этом не останавливаемся.

2.4. В ближайших пунктах мы рассмотрим $G(t,s)$ как функцию t. Покажем, что *вариация $G^{(n-1)}(t,s)$ по t ограничена равномерно по s*:

$$V_a^b G^{(n-1)}(t,s) \leqslant c < \infty \qquad (a < s < b) \tag{2.11}$$

(как и в § 1, вариация всюду берется по первому аргументу). Это позволит применить результаты § 1 к краевой задаче (2.1)—(2.2).

Интуитивно справедливость (2.11) вряд ли может вызвать сомнение. Все же подкрепим это соотношение количественными оценками, представляющими некоторый самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. *При всех s из $[a,b]$ справедливо неравенство*

$$\int_a^b |Y^{(n)}(t,s)|\,dt \leqslant \gamma - 1 \qquad (a \leqslant s \leqslant b), \tag{2.12}$$

где

$$\gamma = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} \int\limits_a^b |p_k(t)|\,dt\right\}.$$

Для доказательства зафиксируем произвольное $s = s_0$ из $[a,b]$ и положим ради простоты записи

$$h = b - a, \qquad y(t) = Y(t, s_0), \qquad \varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}|p_k(t)|.$$

Из равенств

$$y(s_0) = \dot{y}(s_0) = \ldots = y^{(n-2)}(s_0) = 0, \quad y^{(n-1)}(s_0) = 1$$

вытекают соотношения

$$y^{(n-k)}(t) = \frac{1}{(k-1)!}\left[(t-s_0)^{k-1} + \int\limits_{s_0}^{t} (t-s)^{k-1} y^{(n)}(s)\,ds\right], \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \quad (2.13)$$

Пусть вначале $t \geqslant s_0$. Так как $|t - s_0| \leqslant h$, $|t - s| \leqslant h$, то

$$|y^{(n-k)}(t)| \leqslant \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\left(1 + \int\limits_{s_0}^{t} |y^{(n)}(s)|\,ds\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, n \qquad (s_0 \leqslant t \leqslant b). \quad (2.14)$$

Сопоставляя (2.14) с уравнением $Ly = 0$, получаем

$$|y^{(n)}(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |p_k(t)||y^{(n-k)}(t)| \leqslant \varphi(t)\left(1 + \int\limits_{s_0}^{t} |y^{(n)}(s)|\,ds\right) \qquad (s_0 \leqslant t \leqslant b). \quad (2.15)$$

Положим

$$w(t) = \begin{cases} 1 + \int\limits_{s_0}^{t} |y^{(n)}(s)|\,ds & \text{при } t \geqslant s_0, \\ 1 + \int\limits_{t}^{s_0} |y^{(n)}(s)|\,ds & \text{при } t < s_0. \end{cases}$$

Неравенство (2.15) перепишется теперь в виде

$$\dot{w}(t) \leqslant \varphi(t)w(t) \qquad (s_0 \leqslant t \leqslant b).$$

Так как $w(t)$ абсолютно непрерывна и $w(s_0) = 1$, то отсюда, как известно, вытекает, что

$$w(t) \leqslant \exp\int\limits_{s_0}^{t} \varphi(\tau)\,d\tau \qquad (s_0 \leqslant t \leqslant b). \quad (2.16)$$

Аналогично поступаем со значениями $t \leqslant s_0$. Отправляясь от того же соотношения (2.13), получаем неравенства, подобные (2.14) и (2.15), но с заменой $\int_{s_0}^{t}$ на $\int_{t}^{s_0}$. Это дает

$$-\dot{w}(t) \leqslant \varphi(t)w(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant s_0),$$

откуда

$$w(t) \leqslant \exp\int\limits_{t}^{s_0} \varphi(\tau)\,d\tau \qquad (a \leqslant t \leqslant s_0). \tag{2.17}$$

Сопоставляя (2.16) и (2.17), имеем

$$\int\limits_a^b |y^{(n)}(t)|\,dt = \int\limits_a^{s_0} + \int\limits_{s_0}^{b} = w(a) + w(b) - 2 \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\int\limits_a^{s_0} \varphi(\tau)\,d\tau\right) + \exp\left(\int\limits_{s_0}^{b} \varphi(\tau)\,d\tau\right) - 2 \overset{Df}{=} v(s_0). \tag{2.18}$$

До сих пор значение s_0 было фиксированным. Будем его теперь менять и посмотрим, как при этом меняется величина $v(s_0)$. Имеем

$$v'(s) = \varphi(s)\left[\exp\left(\int\limits_a^{s} \varphi(\tau)\,d\tau\right) - \exp\left(\int\limits_{s}^{b} \varphi(\tau)\,d\tau\right)\right].$$

Поскольку $\varphi(s) \geqslant 0$, отсюда следует, что при возрастании s от a до b $v(s)$ вначале убывает, а затем возрастает (вообще говоря, нестрого). Поэтому максимум $v(s)$ на $[a, b]$ достигается в одном из концов этого промежутка:

$$v(s_0) \leqslant v(a) = v(b) = \exp\left(\int\limits_a^{b} \varphi(\tau)\,d\tau\right) - 1 = \gamma - 1 \qquad (a \leqslant s_0 \leqslant b).$$

Отсюда и из (2.18) следует утверждение леммы.

2.5. Так как $Y^{(n-1)}(s, s) = 1$, то из (2.12) вытекает неравенство

$$|Y^{(n-1)}(t, s)| \leqslant \gamma \qquad (a \leqslant t, s \leqslant b), \tag{2.19}$$

которое, в свою очередь, с учетом (2.6) позволяет попутно получить оценки

$$|Y^{(n-k)}(t, s)| \leqslant \frac{\gamma}{(k-1)!}|t - s|^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \qquad (a \leqslant t, s \leqslant b). \tag{2.20}$$

С другой стороны, в силу той же леммы 2.1

$$V_a^b H^{(n-1)}(t, s) \leqslant 1 + V_a^b Y^{(n-1)}(t, s) \leqslant \gamma \qquad (a \leqslant s \leqslant b). \tag{2.21}$$

Далее, согласно (2.19), функции $z_i(s)$, определенные равенствами (2.8), мажорируются следующим образом:

$$|z_i(s)| \leqslant \gamma V_a^b g_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (a < s < b). \tag{2.22}$$

Сопоставляя (2.4), (2.21) и (2.22), приходим к требуемой равномерной по s оценке

$$V_a^b G^{(n-1)}(t,s) \leqslant \gamma \left[1 + \sum_{i=1}^{n} V_a^b g_i \int_a^b |y_i^{(n)}(t)|\,dt\right] \qquad (a < s < b). \tag{2.23}$$

2.6. Задача на собственные значения

$$Lx = \lambda q(t)x \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{2.24}$$

с краевыми условиями (2.2) в случае невырожденности эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = \lambda \int_a^b G(t,s)q(s)x(s)\,ds \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{2.25}$$

Обозначим через λ_i $(0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots)$ существующие собственные значения задачи (2.2)—(2.24), занумерованные, как и в § 1, с учетом кратности. Соотношение (2.23) показывает, что при любой суммируемой на $[a,b]$ $q(t)$ уравнение (2.25) удовлетворяет условиям теоремы 1.1 при $m = n - 1$[1]. Тем самым получаем

Следствие 2.1. *Числитель $D(t,s,\lambda)$ и знаменатель $D(\lambda)$ Фредгольма для уравнения* (2.25) *являются целыми функциями λ порядка не выше $1/n$; поэтому $D(\lambda)$ разлагается в каноническое произведение нулевого рода и, в частности, имеет место формула следов*

$$\sum_i \frac{1}{\lambda_i} = \int_a^b G(t,t)q(t)\,dt, \tag{2.26}$$

где сумма берется по всем λ_i. Все существующие собственные значения удовлетворяют неравенству

$$|\lambda_k| \geqslant Ck^n \qquad (C > 0), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.27}$$

Напомним, что по предположению $n \geqslant 2$. Случай $n = 1$, когда методика предыдущего параграфа неприменима, является в некоторых отношениях особым; в частности, формула следов (2.26) при $n = 1$ теряет смысл (ввиду неопределенности $G(t,t)$ и расходимости ряда $\sum \lambda_i^{-1}$). Впрочем, сам по себе этот случай не очень интересен, поскольку уравнение (2.24) при $n = 1$ решается в квадратурах.

Несколько слов о постоянной C в (2.27). Для эффективного определения этой постоянной мы должны располагать эффективными оценками $|G|$, $V_a^b G^{(n-1)}$. Величины

$$V_a^b g_i, \qquad \int_a^b |q(t)|\,dt, \qquad \int_a^b |p_i(t)|\,dt$$

(а следовательно, и γ) должны, естественно, рассматриваться как известные. Но наряду с ними в правую часть (2.23) и в аналогичную оценку для $|G|$

$$|G(t,s)| \leqslant \gamma \left[\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{i=1}^{n} V_a^b g_i \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y_i(t)|\right]$$

[1] При этом несущественно, считать ли $K(t,s) = G(t,s)$, $d\mu(s) = q(s)ds$, $g(s) = 1$, или $K(t,s) = G(t,s)q(s)$, $d\mu(s) = ds$, $g(s) = |q(s)|$.

(непосредственно вытекающую из (2.20), (2.22)) входят также величины, связанные с $y_1(t), \ldots, y_n(t)$. Эти величины могут быть весьма большими, если задача (2.1)—(2.2) близка к вырожденной; для того чтобы мажорировать их эффективным образом (и тем самым получить значение C), нужна соответствующая дополнительная информация. Разумеется, сказанное не относится к тому случаю, когда решения уравнения $Ly = 0$ известны — например, когда уравнение (2.24) имеет вид $x^{(n)} = \lambda q(t)x$. В этом случае необходимые для эффективного определения C оценки могут быть извлечены непосредственно из явного выражения для $G(t,s)$.

2.7. Исследуем теперь свойства $G(t,s)$ как функции s. Если запас гладкости по t не зависел от краевых условий, то теперь эти условия будут играть определяющую роль.

Для многоточечной краевой задачи, т. е. для случая, когда краевые условия имеют вид

$$l_i(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n-1} c_{ik}^{(j)} x^{(j)}(t_k) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (a \leqslant t_1 < \ldots < t_m \leqslant b), \tag{2.28}$$

свойства $G(t,s)$ как функции s (непрерывность, гладкость, поведение вблизи концов a, b) изучались автором в [27] (см. также [88]). Переход к функционалам общего вида (2.2) связан, естественно, с появлением новых моментов; однако в некоторых отношениях такой более общий подход оказывается одновременно и более простым.

В первую очередь это относится к вопросу о непрерывности $G(t,s)$ по s, который решается без всякого труда. Так как все $g_i(t)$ непрерывны справа внутри (a,b), то в соответствии с (2.8) это же верно и для всех $z_i(s)$, а следовательно, и для $G(t,s)$ как функции s. Далее, при любом $s_0 \in (a,b)$, согласно (2.6), (2.8), имеем

$$z_i(s_0) - z_i(s_0 - 0) = g_i(s_0 - 0) - g_i(s_0), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.29}$$

Поскольку $H(t,s)$ непрерывна, то из (2.10), (2.29) получаем

$$G(t, s_0) - G(t, s_0 - 0) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)[g_i(s_0 - 0) - g_i(s_0)] \qquad (a < s_0 < b). \tag{2.30}$$

Функции $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ линейно независимы, поэтому непрерывность $G(t,s)$ по s на прямой $s = s_0$ эквивалентна непрерывности всех $g_i(t)$ в точке $t = s_0$. Так как $G(t,a)$, $G(t,b)$ всегда можно доопределить по непрерывности, то, таким образом, получаем, что *задача* (2.1)—(2.2) *тогда и только тогда обладает непрерывной по совокупности переменных в квадрате* $a \leqslant t, s \leqslant b$ *функцией Грина, когда все* g_i, $i = 1, \ldots, n$ *непрерывны внутри* (a,b). (Это верно при любом $n \geqslant 2$; при $n = 1$ $G(t,s)$ всегда разрывна на диагонали.) Мы вправе говорить о непрерывности по совокупности переменных, проверив лишь непрерывность по каждому в отдельности, т. к. фактически речь идет о непрерывности вырожденного ядра $F(t,s)$, определенного соотношением (2.9). Дифференцируя (2.30) по t и учитывая непрерывность $H^{(i)}(t,s)$ при $i \leqslant n-2$, убеждаемся, что непрерывность всех g_k внутри (a,b) влечет за собой также непрерывность $G^{(i)}(t,s)$ при $i \leqslant n-2$.

Если хотя бы одна из функций $g_k(t)$ разрывна в точке $t = s_0 \in (a,b)$, то $G(t,s)$ испытывает разрыв по s на прямой $s = s_0$. Последнее выражение имеет следующий смысл: $G(t_0, s)$ разрывна в точке $s = s_0$ при любом фиксированном $t_0 \in [a,b]$, за исключением, может быть, конечного числа таких t_0. Сказанное вытекает из (2.30) и того известного факта, что любое нетривиальное решение уравнения $Ly = 0$ имеет лишь конечное число нулей в $[a, b]$.

2.8. Сложнее вопрос о гладкости $G(t, s)$ по s, к которому мы теперь переходим. Как будет видно, здесь оказывает свое влияние гладкость как «краевых функций» $g_i(t)$, так и коэффициентов $p_i(t)$. Общая схема исследования гладкости может быть изображена следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc} p_i & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & H \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ g_i & \longrightarrow & z_i & \longrightarrow & G \end{array} \tag{2.31}$$

Начнем с гладкости $Y(t, s)$. Так как Y не зависит от краевых условий, здесь все определяется коэффициентами $p_1, \ldots, p_n$.

Лемма 2.2. *Пусть при некотором* $r \geqslant 1$

$$p_i(t) \in C^{r-1}[a, b], \qquad i = 1, 2, \ldots, \min\{r, n\}. \tag{2.32}$$

Тогда при любых i, j *таких, что* $i \leqslant \max\{r, n-1\}$, $j \leqslant r$, *производные* $\dfrac{\partial^{i+j} Y}{\partial t^i \partial s^j}$ *существуют и непрерывны в квадрате* $K: \ a \leqslant t, s \leqslant b$ *(так что, в частности,* $Y \in C^r K$*).*

Основным моментом является существование непрерывной $\dfrac{\partial^r Y}{\partial s^r}$, с чего и начнем. Если $r \geqslant n$, то нужный результат сразу следует из того, что Y как функция s удовлетворяет сопряженному уравнению $L^* Y = 0$; этот способ, однако, отказывает при $r < n$. Мы воспользуемся приемом, применявшемся в [27] (в несколько меньшей общности).

Обозначим через

$$y(t, s; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

решение $y(t)$ уравнения $Ly = 0$, удовлетворяющее условиям

$$y^{(k-1)}(t)\big|_{t=s} = \varphi_k(s), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.33}$$

Ясно, что непрерывность $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ в $[a, b]$ влечет за собой непрерывность $y(t, s; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ в K. Далее, имеет место

Лемма 2.3 ([27]). *Пусть* $p_i \in C[a, b]$, $\varphi_i \in C^1[a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда* $y(t, s; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *непрерывно дифференцируема по* s *в* K *и*

$$\frac{\partial y(t, s; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial s} = y(t, s; \psi_1, \ldots, \psi_n),$$

где

$$\psi_i(t) = \dot{\varphi}_i(t) - \varphi_{i+1}(y), \qquad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\varphi_{n+1}(t) \overset{Df}{=} -\sum_{k=1}^{n} p_k(t) \varphi_{n+1-k}(t).$$

Для доказательства зафиксируем произвольное $s_0 \in [a, b]$ и составим разностное отношение

$$v(t, s, s_0) = \frac{y(t, s) - y(t, s_0)}{s - s_0},$$

где для краткости положено $y(t, s) = y(t, s; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Пусть k — любое из чисел $1, 2, \ldots, n$. Так как $y^{(k)}(t, s)$ непрерывна по t, то для любого s из $[a, b]$ в соответствии с (2.33) и теоремой о среднем значении имеем

$$y^{(k-1)}(t, s)\big|_{t=s_0} = \varphi_k(s) + (s_0 - s) y^{(k)}(t, s)\big|_{t=s_1},$$

где s_1 — точка, промежуточная между s_0 и s. Отсюда, учитывая в случае $k = n$ уравнение $Ly = 0$, находим

$$\lim_{s \to s_0} v^{(k-1)}(t, s, s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{y^{(k-1)}(t, s) - y^{(k-1)}(t, s_0)}{s - s_0} =$$
$$= \lim \frac{\varphi_k(s) - \varphi_k(s_0)}{s - s_0} - \lim_{s_1, s \to s_0} y^{(k)}(t, s)\Big|_{t=s_1} = \dot{\varphi}_k(s_0) - \varphi_{k+1}(s_0) = \psi_k(s_0).$$

Это верно для любого k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Остается заметить, что при любом s ($\neq s_0$) $v(t, s, s_0)$ есть решение уравнения $Lv = 0$, для сходимости решений которого достаточно сходимости начальных данных в одной точке s_0. Лемма 2.3 доказана.

Применим теперь к $Y(t, s) = y(t, s; 0, \ldots, 0, 1)$ полученное правило дифференцирования, предполагая $p_i(t)$ непрерывными. Имеем:

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = y(t, s; 0, \ldots, 0, -1, p_1). \tag{2.34}$$

Далее, если $p_1(t) \in C^1[a, b]$, то

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} = y(t, s; 0, \ldots, 0, 1, -p_1, \dot{p}_1 + p_1^2 - p_2) \tag{2.35}$$

и т. д. Из этого способа дифференцирования непосредственно усматривается, что (2.32) влечет за собой существование и непрерывность $\dfrac{\partial^r Y}{\partial s^r}$, если $p_{r+1}, \ldots, p_n$ непрерывны (это относится к случаю $r < n$). От последнего предположения, обеспечивавшего непрерывность $y^{(n)}$ при доказательстве леммы 2.3, нетрудно, конечно, избавиться. Именно, аппроксимируем $p_i(t)$, $i = r+1, r+2, \ldots, n$, непрерывными функциями $p_{i,m}(t)$ так, чтобы

$$\int_a^b |p_i(t) - p_{i,m}(t)|\, dt \to 0 \qquad (m \to \infty), \qquad i = r+1, r+2, \ldots, n. \tag{2.36}$$

Пусть L_m есть оператор с непрерывными коэффициентами $p_1, \ldots, p_r$, $p_{r+1,m}, \ldots, p_{n,m}$, а $y_m(t, s; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — решение уравнения $L_m y = 0$, удовлетворяющего условиям (2.33). Из (2.36) следует, что при любых ограниченных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$

$$y_m(t, s; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \to y(t, s; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \qquad (m \to \infty)$$

равномерно в K. Остается вычислить $\dfrac{\partial^r y_m(t,s;0,\ldots,0,1)}{\partial s^r}$ по лемме 2.3 и перейти к пределу при $m\to\infty$ (что законно ввиду равномерной сходимости производных). Итак, $\dfrac{\partial^r Y}{\partial s^r}$ существует и непрерывна в K.

Заметим теперь, что Y представима в виде

$$Y(t,s)=\sum_{i=1}^{n} y_i(t)v_i(s) \qquad (a\leqslant t,s\leqslant b). \tag{2.37}$$

Здесь $y_1(t),\ldots,y_n(t)$ — какая-либо фундаментальная система решений уравнения $Ly=0$; $v_i(s)$ легко выразить через вронскианы этой системы. Для нас сейчас существенно то, что, ввиду линейной независимости функций $y_i(t)$, r-кратная непрерывная дифференцируемость $Y(t,s)$ по s влечет за собой такую же дифференцируемость каждой из функций $v_i(s)$, $i=1,2,\ldots,n$. Так как соотношения $y_i(t)\in C^l[a,b]$, $l=\max\{r,n-1\}$ вытекают из уравнения $Ly_i=0$ и (2.32) очевидным образом, то лемма 2.2 полностью доказана.

Итак, гладкость $Y(t,s)$ как по t, так и по s, растет с гладкостью коэффициентов $p_i(t)$, хотя и не одинаковым образом (как в самосопряженном случае). Можно характеризовать гладкость функции $u(t)$ показателем гладкости $\chi(u)$, равным наибольшему из чисел k, при которых $u\in C^k[a,b]$ ($C^0[a,b]=C[a,b]$); для $u\notin C[a,b]$ полагаем $\chi(u)=-1$. Тогда показатели гладкости $Y(t,s)$ как функции t (при любом фиксированном $s\in[a,b]$) и как функции s (при любом $t\in[a,b]$) оцениваются соответственно следующим образом:

$$\chi_t(Y)\geqslant i_0=n+\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\chi(p_i)\}, \qquad \chi_s(Y)\geqslant j_0=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{i+\chi(p_i)\}. \tag{2.38}$$

При этом в неравенствах (2.38) «почти всегда» имеет место знак равенства (т. е. случаи, когда имеет место знак $>$, являются в определенном смысле исключительными). Учитывая (2.37), легко видеть, что в K непрерывны все производные

$$\frac{\partial^{i+j}Y}{\partial t^i\partial s^j},\ \text{где } i\leqslant i_0,\ j\leqslant j_0.$$

2.9. Покончив с гладкостью $Y(t,s)$, движемся дальше в соответствии со схемой (2.31). Переход $Y\longrightarrow H$ несложен, т. к. здесь требует рассмотрения лишь диагональ $t=s$.

Лемма 2.4. *Пусть числа i_0, j_0 имеют тот же смысл, что и в* (2.38). *Тогда в K существуют и непрерывны производные $\dfrac{\partial^{i+j}H(t,s)}{\partial t^i\partial s^j}$, где i и j таковы, что $i\leqslant i_0$, $j\leqslant j_0$, $i+j\leqslant n-2$. В частности, $H\in C^{j_0}K$, если $j_0\leqslant n-2$. Кроме того, при любом $j\leqslant j_0$ и любом $s\in(a,b)$*

$$\left.\frac{\partial^{n-1}H}{\partial t^{n-1-j}\partial s^j}\right|_{t=s+0}-\left.\frac{\partial^{n-1}H}{\partial t^{n-1-j}\partial s^j}\right|_{t=s-0}=\left.\frac{\partial^{n-1}H}{\partial t^{n-1-j}\partial s^j}\right|_{t=s+0}=(-1)^j.$$

Поскольку H отлична от нуля лишь при $t>s$, где она совпадает с Y, то мы можем воспользоваться формулами (2.34), (2.35) и дальнейшими того же типа, получаемыми с помощью леммы 2.3. (Можно вначале дифференцировать по s, а затем по t, т. к. порядок не имеет значения.) Отсюда утверждение леммы 2.4 усматривается непосредственно. Разумеется, для гладкого случая $p_i\in C^{n-i}$, $i=1,2,\ldots,n$ это утверждение общеизвестно.

2.10. Переходим к функциям $z_i(s)$. Формула (2.8) определяет эти функции в интервале (a, b); на значения $s = a$ и $s = b$ продолжим $z_i(s)$ по непрерывности (существование $z_i(a+0)$, $z_i(a-0)$ очевидно). Здесь и далее через $\widetilde{g}_i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ обозначается функция $g_i(t)$, переопределенная в точках $t = a$ и $t = b$ по непрерывности справа и слева соответственно. Через I обозначим произвольный фиксированный промежуток, содержащийся в $[a, b]$ и не вырождающийся в точку.

Лемма 2.5. *Пусть при некоторых i, r $\widetilde{g}_i \in C^r I$, причем выполнено условие* (2.32). *Тогда $z_i \in C^r I$.*

Согласно определению $\widetilde{g}_i$, (2.8) можно переписать в виде

$$z_i(s) = \int\limits_s^b Y^{(n-1)}(t, s)\, d\widetilde{g}_i(t) + [g_i(b) - g_i(b-0)]Y^{(n-1)}(b, s), \tag{2.39}$$

причем, в отличие от (2.8), это равенство имеет место в замкнутом промежутке $a \leqslant s \leqslant b$.

В силу леммы 2.2

$$W_i(t, s) \stackrel{Df}{=} \frac{\partial^{n-1+i} Y(t, s)}{\partial t^{n-1} \partial s^i} \in CK, \qquad i = 0, 1, \ldots, r, \tag{2.40}$$

откуда, в частности, следует, что второе слагаемое в правой части (2.39) заведомо является функцией класса $C^r[a, b]$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением интегрального члена, который обозначим через $z_i^*(s)$. Так как в доказательстве нуждается лишь случай $r \geqslant 1$, то $z_i^*(s)$ можно записать в виде

$$z_i^*(s) = \int\limits_s^b W_0(t, s) \widetilde{g}'(t)\, dt.$$

Формальное r-кратное дифференцирование по s с учетом равенства $W_0(s, s) = 1$ дает

$$z_i^{*(r)}(s) = -\widetilde{g}_i^{(r)}(s) - \sum_{k=1}^{r-1} [W_k(s, s) \widetilde{g}_i'(s)]^{(r-k-1)} + \int\limits_s^b W_r(t, s) \widetilde{g}_i'(t)\, dt. \tag{2.41}$$

Если мы проверим, что все содержащиеся в правой части производные непрерывны, то тем самым будет обосновано дифференцирование и доказана лемма. По условию $\widetilde{g} \in C^r I$; это вместе с (2.40) позволяет свести дело к проверке непрерывности производных, стоящих под знаком суммы. В действительности, справедливо даже большее, а именно:

$$W_k(s, s) \widetilde{g}_i'(s) \in C^{r-k} I, \qquad k = 1, 2, \ldots, r-1. \tag{2.42}$$

В самом деле, $\widetilde{g}_i' \in C^{r-1} I$, а гладкость $W_k(s, s)$ легко проверить с помощью формул типа (2.34), (2.35). Находим последовательно

$$W_1(s, s) = p_1(s), \qquad W_2(s, s) = p_1' + p_1^2 - p_2, \qquad W_3(s, s) = p_1'' + 3p_1 p_1' + p_1^3 - p_2' - 2p_1 p_2 + p_3$$

и т. д. Из самого способа получения видно, что $W_k(s,s)$ является многочленом от $p_l^{(m)}(s)$, где $l+m \leqslant k$. Поэтому из (2.32) вытекает, что $W_k(s,s) \in C^{r-k}I$ при каждом k $(1 \leqslant k \leqslant r)$. Соотношения (2.42), а вместе с ними и лемма 2.5 доказаны.

Отметим, что гладкость z_i обычно не превосходит гладкости $\widetilde{g}_i$. Пусть, например, $\widetilde{g}^{(r)}$ не непрерывна, как в условиях леммы, а лишь кусочно-непрерывна в I; условие же (2.32) оставим в силе. Тогда вместо (2.42) будет выполнено соотношение

$$W_k(s,s)\widetilde{g}_i'(s) \in C^{r-k-1}I, \qquad k = 1, 2, \ldots, r-1.$$

Это вместе с (2.41) показывает, что разность между $z_i^{*(r)}$ и $-\widetilde{g}_i^{(r)}$ непрерывна в I. То же самое, следовательно, относится и к разности между $z_i^{(r)}$ и $-\widetilde{g}_i^{(r)}$, поэтому обе эти функции имеют одни и те же разрывы в I.

2.11. Теперь, наконец, легко охарактеризовать гладкость самой функции Грина $G(t,s)$. Пусть по-прежнему $I \subset [a,b]$ — не вырождающийся в точку промежуток.

Теорема 2.1. *Для того чтобы в полосе $t \in [a,b]$, $s \in I$ существовала непрерывная производная $\dfrac{\partial^{i+j}G(t,s)}{\partial t^i \partial s^j}$, достаточно выполнения следующих условий:*

$$i + j \leqslant n-2, \tag{2.43}$$

$$p_k(t) \in C^{j-k}I, \qquad k = 1, 2, \ldots, j, \tag{2.44}$$

$$\widetilde{g}_k(t) \in C^jI, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.45}$$

В соответствии с доопределением $z_i(s)$ при $s = a$, $s = b$, здесь считается, что $G(t,s)$ всюду в K задана формулой (2.10), т. е. доопределена при $s = a$, $s = b$ по непрерывности[1]. Теорема 2.1 непосредственно вытекает из установленных выше лемм и формулы (2.10). В пояснении нуждается лишь то, что в (2.44) фигурирует C^jI, а не $C^j[a,b]$. Легко видеть, что это не создает дополнительных трудностей. В самом деле, (2.44) обеспечивает выполнение условия леммы 2.2 для $r = j$ в квадрате $I \times I$; поэтому $Y(t,s)$ j-кратно непрерывно дифференцируема по s в этом квадрате. Как и при доказательстве леммы 2.2, заключаем отсюда, что в разложении (2.37) $v_k \in C^jI$, $k = 1, 2, \ldots, n$; поэтому $\dfrac{\partial^{m+j}Y}{\partial t^m \partial s^j}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$ непрерывны во всей полосе $[a,b] \times I$. Что касается лемм 2.4 и 2.5, то здесь переход от $[a,b]$ к I совсем очевиден.

Полагая $I = [a,b]$, получаем, в частности,

Следствие 2.2. *Если $r \leqslant n-2$ и*

$$p_k \in C^{r-k}[a,b], \qquad k = 1, 2, \ldots, r, \tag{2.46}$$

$$\widetilde{g}_k \in C^r[a,b], \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.47}$$

то $G(t,s) \in C^rK$.

[1]Речь идет, таким образом, о «самой гладкой» из всех функций Грина, отличающихся друг от друга значениями на несущественных множествах точек.

С помощью тех же лемм без труда получаются условия непрерывности частных производных порядка $n-1$ и выше в каждой из трапеций, на которые соответствующая полоса разбивается диагональю $t=s$. Подробнее на этом не останавливаемся.

Из предыдущего ясно также, что требуемый порядок гладкости не может быть понижен ни для одной из функций p_k, $\widetilde{g}_k$ в отдельности.

В монографии Л. Коллатца [89] вскользь затрагивается (с. 81–82) вопрос о гладкости функции Грина $G(t,s)$ двухточечной краевой задачи. Автор высказывает мнение, что хотя при доказательстве соотношения $G\in C^{n-2}K$ удобно предполагать коэффициенты p_i гладкими, в действительности существенна только их непрерывность. После изложенного выше ясно, что это справедливо лишь при $n\leqslant 3$. Если, например, двухточечные краевые условия заданы в концах промежутка $[-1,1]$ и $L=\dfrac{d^4}{dt^4}+|t|\dfrac{d^3}{dt^3}$, то $\dfrac{\partial^2 G}{\partial s^2}$ заведомо разрывна на прямой $s=0$.

2.12. Как уже говорилось, для частного случая — многоточечных краевых условий (2.28) — гладкость функции Грина изучалась в [27]. Приведем здесь соответствующий результат, который легко получить из следствия 2.2, если преобразовать условия (2.28) к форме (2.2). Назовем *порядком* точки t_k максимальный из порядков производных $x^{(j)}(t_k)$, входящих хотя бы в один из функционалов $l_i[x]$ с ненулевым коэффициентом. *Пусть при некотором* $r\leqslant n-2$ *выполнено условие* (2.46)*; тогда для соотношения* $G(t,s)\in C^rK$ *необходимо и достаточно, чтобы внутри* (a,b) *не содержалось точек* t_k *порядка выше чем* $n-2-r$. При доказательстве необходимости используются соображения, подобные тем, которые приводились в конце п. 2.10.

Заканчивая рассмотрение дифференциальных свойств функции Грина, напомним, что гладкость по t применялась выше до получения оценок роста собственных значений и фредгольмовских рядов соответствующего интегрального уравнения. Поскольку установленные оценки были точными в смысле порядка роста, дополнительный учет гладкости по s не может в этом отношении дать ничего существенно нового. По-видимому, гладкость $G(t,s)$ по s имеет меньший интерес для приложений, чем гладкость по t. К возможным приложениям относятся некоторые вопросы разложения по собственным функциям (см., например, статью Я. Д. Тамаркина [90]).

2.13. Последнее свойство функции Грина, на котором мы остановимся, — это стремление $G(t,s)$ к нулю при $s\uparrow b$ или $s\downarrow a$ (при определенных краевых условиях) и скорость такого стремления. Запись (2.2) функционалов l_i хорошо приспособлена для случая $s\uparrow b$, которым мы и ограничимся. Чтобы получить аналогичные формулировки для $s\downarrow a$, следует «перебросить» внеинтегральные члены в правой части (2.2) с конца $t=a$ на конец $t=b$; при этом $g_1,\dots,g_n$ перейдут в другие функции $g_1^*,\dots,g_n^*$, связанные с g_i простыми соотношениями.

В дальнейшем будет удобно считать, что

$$g_1(b)=g_2(b)=\ldots=g_n(b)=0; \tag{2.48}$$

это не ограничивает общности, т. к. $g_i(t)$ определены с точностью до постоянного слагаемого.

Начнем со следующей равномерной оценки:

$$|Y^{(n-1)}(t,s)-1|\leqslant\gamma(\tau)\quad(\tau\leqslant s\leqslant t\leqslant b),\ \text{где}\ \gamma(\tau)=o(1)\ \text{при}\ \tau\uparrow b. \tag{2.49}$$

Для доказательства воспользуемя леммой 2.1, отнесенной к промежутку $[\tau, b]$ вместо $[a, b]$. Так как $Y^{(n-1)}(s,s) \equiv 1$, получаем, что (2.49) справедливо, в частности, при

$$\gamma(\tau) \overset{Df}{=} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \int\limits_{\tau}^{b} |p_k(t)|\, dt\right\} - 1. \tag{2.50}$$

Из (2.8), (2.48), (2.49) вытекает, что

$$z_i(b-0) = -g_i(b-0), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.51}$$

Так как $G(t,b)$ доопределялась по непрерывности и $H(t,b) \equiv 0$, то, согласно (2.10), (2.48) и (2.51), находим

$$G(t,b) = G(t,b-0) = \sum_{i=1}^{n} g_i(b-0) y_i(t).$$

Поскольку $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы, это означает следующее: соотношение

$$G(t,b) \equiv 0 \tag{2.52}$$

имеет место в том и только том случае, если все $g_i(t)$ непрерывны в точке $t = b$. (Это справедливо, конечно, независимо от предположения (2.48).) Сходимость $G(t,s) \to 0$ при $s \uparrow b$, очевидно, равномерна по t, если, как предполагается, $n \geqslant 2$.

В частности, для многоточечной задачи (2.28) соотношение (2.52) имеет место в том и только том случае, если b не является точкой порядка $n-1$ (см. п. 2.12).

Сходство между предпосылкой для (2.52) и условием неразрывности $G(t,s)$ в K (см. п. 2.7) не случайно: между этими двумя моментами имеется простая связь. Именно, задачу (2.1)—(2.2) можно рассмотреть на более широком промежутке $[a, b']$, $b' > b$, если продолжить коэффициенты $p_i(t)$ с сохранением суммируемости на $[a, b']$ и положить $g_i(t) \equiv g_i(b)$ при $t \in [b, b']$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно,

$$G(t,s) = H(t,s) \equiv 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant b,\ b < s \leqslant b'),$$

поэтому (2.52) эквивалентно непрерывности $G(t,s)$ по s на прямой $s = b$.

2.14. Пусть

$$g_i(b-0) = g_i(b) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.53}$$

так что (2.52) выполняется. Рассмотрим вопрос о скорости убывания $G(t,s)$ при $s \uparrow b$.

Заметим прежде всего, что (2.49) влечет за собой оценку для функции Коши в квадрате K

$$|H(t,s)| \leqslant \frac{1+\gamma(s)}{(n-1)!}(t-s)_+^{n-1}. \tag{2.54}$$

Здесь используется обозначение $u_+ = \max\{0, u\}$. Оценивая с помощью (2.49) также каждую из функций $z_i(s)$ и полагая

$$\xi_i = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y_i(t)|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

получаем в итоге

$$|G(t,s)| \leqslant [1+\gamma(s)] \left[\frac{1}{(n-1)!}(t-s)_+^{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i V_s^b g_i\right]. \tag{2.55}$$

Чтобы сделать эту оценку равномерной по t, достаточно заменить $(t-s)_+$ на $b-s$.

Если предположить, что функции $\mathrm{Re}g_i(t)$, $\mathrm{Im}g_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ монотонны (нестрого) в некотором интервале (s_0,b) — а это так для большинства практически интересных задач, — то оценка (2.55) с учетом (2.53) еще упрощается:

$$|G(t,b)| \leqslant [1+\gamma(s)]\left[\frac{1}{(n-1)!}(t-s)_+^{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\xi_i|g_i(s)|\right] \quad (s_0\leqslant s\leqslant b). \tag{2.56}$$

Итак, в этом случае скорость убывания $G(t,s)$ при $s\uparrow b$ и фиксированном $t\in[a,b]$ аналогична (в смысле грубого порядка) скорости убывания функции $\max\limits_i|g_i(s)|$; из (2.9), (2.10), (2.49) и линейной независимости $y_i(t)$ вытекает, что лишь для конечного числа t $G(t,s)$ может убывать существенно быстрее. Если же оценивать $G(t,s)$ равномерно по t, то следует учитывать вклад, вносимый функцией Коши; скорость убывания $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|G(t,s)|$ аналогична скорости убывания функции

$$\max\{(b-s)^{n-1},|g_1(s)|,\ldots,|g_n(s)|\}.$$

Предположение о монотонности $\mathrm{Re}g_i(t)$, $\mathrm{Im}g_i(t)$ вблизи b оправдывается, в частности, для многоточечных краевых условий (2.28), которых коснемся несколько подробнее. Для нас сейчас интересен лишь случай $t_m=b$ (иначе $G\equiv H$ в полосе $t_m<s<b$), причем порядок r точки b в соответствии с (2.53) не должен превосходить $n-2$. Преобразуя функционалы l_i от формы (2.28) к форме (2.2), находим

$$g_i(t)=-\sum_{j=0}^{r}\frac{1}{(n-j-1)!}c_{im}^{(j)}(b-t)^{n-j-1}, \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (t_{m-1}<t\leqslant b). \tag{2.57}$$

Мы воспользовались тем, что, по определению порядка, все $c_{im}^{(j)}$ равны 0 при $j>r$. Из (2.56), (2.57) вытекает, что

$$G(t,b-\varepsilon)=O(\varepsilon^{n-r-1}) \qquad (\varepsilon\downarrow 0)$$

равномерно по $t\in[a,b]$. Нетрудно получить также более подробную формулу

$$G(t,b-\varepsilon)=-\frac{\varepsilon^{n-r-1}}{(n-r-1)!}[y_0(t)+o(1)] \quad \text{при } \varepsilon\downarrow 0\ (a\leqslant t<b), \tag{2.58}$$

где $y_0(t)$ есть решение уравнения $Ly=0$ такое, что

$$l_i[y_0]=c_{im}^{(r)}, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

Соотношение (2.58) справедливо, вообще говоря, при любом порядке r, $0\leqslant r\leqslant$ $\leqslant n-1$ и любом фиксированном $t\in[a,b)$; в том (и только том) случае, если $r\geqslant 1$, оно выполняется равномерно по $t\in[a,b]$. Если коэффициент $p_1(t)$ ограничен в левой полуокрестности точки $t=b$ и, следовательно, $\gamma(s)=O(b-s)$ при $s\uparrow b$, можно заменить в (2.58) $o(1)$ на $O(\varepsilon)$. Аналогичные замечания относятся и к формуле

$$G(t,a+\varepsilon)=\frac{(-\varepsilon)^{n-q-1}}{(n-q-1)!}[\widetilde{y}_0(t)+o(1)] \quad \text{при } \varepsilon\downarrow 0\ (a<t\leqslant b),$$

где q — порядок точки $a = t_1$ и $\widetilde{y}_0(t)$ — решение уравнения $Ly = 0$, определяемое условиями

$$l_i[\widetilde{y}_0] = c_{i1}^{(q)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Заметим, что для самосопряженных краевых задач вопрос о стремлении $G(t, s)$ к нулю при $s \uparrow b$ (или $s \downarrow a$) с той или иной скоростью эквивалентен, ввиду симметричности ядра $G(t, s)$, вопросу о стремлении $G(t, s)$ к нулю при $t \uparrow b$ ($t \downarrow a$) с той же скоростью. Последний вопрос просто решается по виду краевых условий: например, соотношение $G(b - \varepsilon, s) = O(\varepsilon^k)$ ($1 \leqslant k < n$) выполняется в том и только том случае, если краевые условия содержат равенства $x(b) = \ldots = x^{(k-1)}(b) = 0$, т. е. если функционалы $l_1[x], \ldots, l_n[x], x^{(i)}(b)$ линейно зависимы в $C^{n-1}[a, b]$ при любом i, $0 \leqslant i \leqslant k - 1$. Скажем, если L — формально самосопряженный оператор второго порядка и краевые условия имеют вид $\dot{x}(a) = x(b) = 0$, то G аннулируется при $t = b$ (но не при $t = a$) и, следовательно, также при $s = b$ (но не при $s = a$), т. к. $G(t, s) = \overline{G(s, t)}$. Стоит подчеркнуть, что подобная аналогия ни в коей мере не распространяется на несамосопряженные задачи[1]. В общем случае, например, каждое из соотношений $G(t, b) \equiv 0$, $G(b, s) \equiv 0$ может выполняться в отсутствие другого. Между прочим, подобные соображения позволяют иногда быстро проверять несамосопряженность двухточечных краевых условий. В частности, из вышесказанного сразу видно, что краевые условия, не содержащие значений $x^{(n-1-j)}(b), x^{(n-j)}(b), \ldots, x^{(n-1)}(b)$, могут быть самосопряженными только в том случае, если содержат равенства $x(b) = \dot{x}(b) = \ldots = x^{(j)}(b) = 0$. Разумеется, это можно доказать и чисто алгебраически.

2.15. Характеристика убывания $G(t, s)$ при $s \uparrow b$ имеет, конечно, и более существенные приложения. Чтобы пояснить это, сделаем небольшой экскурс в область несингулярных задач. Именно, вместо суммируемости в $[a, b]$ функции $f(t)$ в (2.1) потребуем лишь ее локальной суммируемости в $[a, b)$. При каком поведении $f(t)$ вблизи $t = b$ можно по-прежнему утверждать, что решение задачи (2.1)—(2.2) существует и представляется формулой (2.3) с абсолютно сходящимся при каждом $t \in [a, b]$ интегралом?

Если опять предположить, что все $\mathrm{Re}\, g_i(t)$, $\mathrm{Im}\, g_i(t)$ нестрого монотонны вблизи $t = b$ (и равны нулю при $t = b$), то ответ таков: *для этого необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int^{b} |f(t) g_i(t)|\, dt < \infty, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.59}$$

Действительно, абсолютная сходимость $\displaystyle\int_a^b G(t, s) f(s)\, ds$ при любом $t \in [a, b)$ непосредственно вытекает из (2.56), (2.59). Проверим, что этот интеграл дает решение задачи (2.1)—(2.2). На справедливость соотношений

$$\left(\int_a^t Y(t, s) f(s)\, ds \right)^{(k)} = \int_a^t Y^{(k)}(t, s) f(s)\, ds, \quad k = 1, \ldots, n-1 \quad (a \leqslant t < b), \tag{2.60}$$

[1]Напомним, кстати, что само свойство самосопряженности специфично для двухточечных краевых условий, см. [91], [27].

$$\left(\int_a^t Y(t,s)f(s)\,ds\right)^{(n)} = \int_a^t Y^{(n)}(t,s)f(s)\,ds + f(t) \quad \text{почти всюду в } [a,b) \tag{2.61}$$

рост $f(t)$ вблизи $t = b$, очевидно, не влияет. Далее, без ограничения общности можно считать, что все $g_i(t)$ непрерывны в точке b, т. е. имеет место (2.53); в противном случае (2.59) означало бы суммируемость $f(t)$ на $[a,b]$. Ввиду монотонности $\mathrm{Re}g_i(t)$, $\mathrm{Im}g_i(t)$ вблизи $t = b$

$$V_s^b g_i = O[|g_i(s)|] \quad \text{при } s \uparrow b,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.62}$$

Согласно (2.8), (2.49), (2.53) и (2.62)

$$|z_i(s) + g_i(s)| = \left|\int_s^b [Y^{(n-1)}(t,s) - 1]\,dg_i(t)\right| \leqslant \gamma(s)V_s^b g_i = o[|g_i(s)|],$$

т. е.

$$z_i(s) = -g_i(s)[1 + o(1)] \quad \text{при } s \uparrow b,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.63}$$

Для вырожденного ядра $F(t,s)$, определенного формулой (2.9), имеем

$$\left(\int_a^b F(t,s)f(s)\,ds\right)^{(k)} = \sum_{i=1}^n y_i^{(k)}(t)\int_a^b z_i(s)f(s)\,ds = \int_a^b F^{(k)}(t,s)f(s)\,ds, \tag{2.64}$$

$$k = 0, 1, \ldots, n \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

поскольку интегралы сходятся в силу (2.59) и (2.63). Теперь вполне очевидно, что функция

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)\,ds = \int_a^t Y(t,s)f(s)\,ds - \int_a^b F(t,s)f(s)\,ds \tag{2.65}$$

удовлетворяет уравнению $Lx = f$, а выполнение краевых условий (2.2) вытекает из нескольких дополнительных замечаний. Во-первых, согласно (2.60), (2.64), (2.65),

$$x^{(n-1)}(t) = \int_a^t Y^{(n-1)}(t,s)f(s)\,ds - \int_a^b F^{(n-1)}(t,s)f(s)\,ds \qquad (a \leqslant t < b).$$

Отсутствие здесь точки $t = b$ не имеет значения для краевых условий, т. к. ввиду непрерывности g_i при $t = b$

$$\int_a^b x^{(n-1)}(t)\,dg_i(t) = \int_a^{b-0} x^{(n-1)}(t)\,dg_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.66}$$

Наконец, законность перестановки интегрирований по dg_i и по ds при вычислении величин (2.66) легко следует из (2.59), (2.62).

Осталось проверить необходимость условия (2.59). Суммируемость $G(t,s)f(s)$ при всех $t \in [a,b)$ эквивалентна суммируемости $F(t,s)f(s)$ при всех $t \in [a,b)$, что ввиду линейной независимости $y_1(t),\dots,y_n(t)$, в свою очередь, сводится к суммируемости каждой из функций $z_i(s)f(s)$, $i=1,\dots,n$. Отсюда в соответствии с (2.63) вытекает и суммируемость функций $g_i(s)f(s)$.

Из доказательства видно, что монотонность $\mathrm{Re}g_i(t)$, $\mathrm{Im}g_i(t)$ вблизи $t=b$ может быть заменена несколько менее ограничительным требованием (2.62) или даже требованием

$$V_a^b g_i = o[\gamma(s)|g_i(s)|] \quad \text{при } s \uparrow b,\ i=1,2,\dots,n. \tag{2.67}$$

Если не выполняется и (2.67), то (2.59) следует заменить на

$$\int^b |f(t)| V_t^b g_i \, dt < \infty, \qquad i=1,2,\dots,n,$$

причем это условие является, вообще говоря, лишь достаточным, но не необходимым для справедливости формулы (2.3) с интегралом, абсолютно сходящимся при $a \leqslant t < b$.

Утверждение, аналогичное только что доказанному, справедливо, конечно, и для $f(t)$ с особенностью в точке $t=a$ (при этом функции g_i должны быть соответствующим образом изменены), а также для $f(t)$ с особенностями в обоих концах. В частности, для многоточечной задачи получаем

Следствие 2.3. *Пусть в многоточечных краевых условиях* (2.28) *порядки точек* $t_1 = a$ *и* $t_m = b$ *равны соответственно* q *и* r. *Для того чтобы решение невырожденной задачи* (2.1)—(2.28) *существовало и представлялось формулой* (2.3) *с абсолютно сходящимся интегралом, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_a^b (t-a)^{n-q-1}(b-t)^{n-r-1}|f(t)| \, dt < \infty.$$

При этом решение $x(t)$ обладает стандартной гладкостью (абсолютная непрерывность $x^{(n-1)}$) лишь внутри (a,b). На концах же $t=a$ и $t=b$, вообще говоря, происходит потеря гладкости: производные более высоких порядков, чем те, которые входят в краевые условия, могут не существовать. Заметим, что в условиях следствия 2.3 интеграл в (2.3) абсолютно сходится также и при $t=a$, $t=b$ и само решение $x(t)$ непрерывно в $[a,b]$; при других краевых условиях и это не обязательно. Пусть, например, краевые условия заданы в виде

$$l_i[x] = \int_a^b x(t)h_i(t)\, dt = 0, \qquad i=1,2,\dots,n, \tag{2.68}$$

где $h_1(t),\dots,h_n(t)$ непрерывны в $[a,b]$. Переходя к форме (2.2) и применяя установленный выше результат (для $t=a$ и $t=b$), получаем, что *при*

$$\int_a^b (t-a)^n (b-t)^n |f(t)|\, dt < \infty$$

решение задачи (2.1)—(2.68) *дается формулой* (2.3). В этом случае интеграл в (2.3) абсолютно сходится при любом $t \in (a, b)$, но, вообще говоря, не на концах, т. к. не исключено, что $x(a) = \infty$ или $x(b) = \infty$.

В связи с рассмотренным вопросом возникает ряд других: когда справедлива формула (2.3) с неабсолютно сходящимся интегралом, как изменится ситуация, если допустить несуммируемые особенности при $t = a$, b также и у коэффициентов $p_i(t)$, и т. п. Мы не останавливаемся на этих достаточно интересных вопросах, поскольку систематическое изучение сингулярных задач не входит в план данной работы.

2.16. В настоящем параграфе были рассмотрены многие, но, разумеется, не все свойства функции Грина, представляющие интерес. В частности, для важного вещественного случая большое значение имеет вопрос об условиях знакопостоянства функции Грина (или ее производных по t) в квадрате K либо в полосах вида $c \leqslant t \leqslant d$. Далее, для некоторых вещественных краевых задач функция Грина часто оказывается с точностью до знака осцилляционным ядром в смысле Гантмахера – Крейна. Содержательное изучение этого круга вопросов потребовало бы более высокого «уровня информации» относительно коэффициента уравнения и краевых условий, чем тот, который поддерживался выше. В следующем параграфе будут, в частности, затронуты некоторые подобные вопросы для двучленного уравнения $x^{(n)} + q(t)x = 0$.

§ 3. Двухточечные интерполяционные задачи и интегральный признак неосцилляции для уравнения $x^{(n)} + q(t)x = 0$

3.1. В настоящем параграфе для двучленного уравнения порядка $n \geqslant 2$

$$x^{(n)} + q(t)x = 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{3.1}$$

с суммируемой на $[a, b]$ $q(t)$ изучаются краевые задачи вида

$$x(a) = \dot{x}(a) = \ldots = x^{(n-k-1)}(a) = \\ = x(b) = \dot{x}(b) = \ldots = x^{(k-1)}(b) = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1), \tag{3.2}$$

а также некоторые смежные вопросы. Связь с предшествующими параграфами состоит, главным образом, в том, что нам будет необходима формула следов (2.26).

Краевые условия (3.2) определяют т. н. двухточечную интерполяционную задачу (см. главу 3), которую в дальнейшем называем $(n-k, k)$-задачей или, более подробно, $(n-k, k; a, b)$-задачей (концы $[a, b]$ будут иногда заменяться в краевых условиях (3.2) и другими точками). Помимо определенного самостоятельного интереса, рассматриваемые задачи в вещественном случае важны также ввиду их непосредственной связи со свойством неосцилляции решений.

Напомним, что промежуток J называется *промежутком неосцилляции* для оператора $L = \dfrac{d^n}{dt^n} + p_1 \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n$ (единичный оператор при p_n для простоты опускается) с вещественными коэффициентами $p_i(t)$, если каждое нетривиальное решение уравнения $Lx = 0$ имеет в J не более $n-1$ нуля. Класс операторов L, для которых J есть промежуток неосцилляции, будем обозначать через $T_0 J$. Неосцилляция является одним из узловых моментов качественной теории вещественного уравнения $Lx = 0$, т. к. связана с весьма разнообразными аспектами этой теории; более подробно эти вопросы рассматриваются в третьей главе. Упомянутая связь неосцилляции с двухточечными интерполяционными краевыми задачами состоит в следующем.

Лемма Пойа [38]. *Пусть коэффициенты оператора L вещественны и суммируемы на $[a,b]$. Соотношение $L \in T_0[a,b]$ имеет место в том и только том случае, если для уравнения $Lx=0$ не вырождены $(n-k,k;a,s)$-задачи при всех k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и всех $s \in (a,b)$.*

В [38] (см. также [39]) это утверждение доказано в предположении непрерывности коэффициентов, что, как показывает анализ, не имеет существенного значения для доказательства. Более содержательный факт будет установлен в следующей главе (теорема 3.3). В формулировке леммы Пойа можно, очевидно, поменять ролями концы отрезка $[a,b]$ и говорить о $(n-k,k;s,b)$-задачах при $s \in [a,b)$.

Итак, один из возможных путей получения признаков неосцилляции состоит в том, что исследуются условия, обеспечивающие невырожденность $(n-k,k)$-задач при всех k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$; именно такой путь будет избран ниже.

3.2. Рассмотрим при краевых условиях (3.2) задачу на собственные значения

$$x^{(n)} + \lambda q(t)x = 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.3}$$

Вещественность $q(t)$ на этом этапе не предполагается.

Обозначим через $G_{n-k,k}(t,s)$ функцию Грина оператора $L = \dfrac{d^n}{dt^n}$ при краевых условиях (3.2). Согласно следствию 2.1, для задачи (3.2)—(3.3) имеет место равенство

$$\sum_i \frac{1}{\lambda_i} = -\int\limits_a^b G_{n-k,k}(s,s)q(s)\,ds, \tag{3.4}$$

где сумма берется по всем собственным значениям с учетом их кратностей как корней знаменателя Фредгольма. Чтобы сделать формулу (3.4) эффективной, следует вычислить в явном виде $G_{n-k,k}(s,s)$.

Лемма 3.1. *При любых n и k $(n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1)$*

$$G_{n-k,k}(s,s) = \frac{(-1)^k (s-a)^{n-1}(b-s)^{n-1}}{(n-1)(k-1)!(n-k-1)!(b-a)^{n-1}} \qquad (a \leqslant s \leqslant b). \tag{3.5}$$

Можно доказать (3.5), вычисляя $G_{n-k,k}(t,s)$ по общим формулам и полагая затем $t=s$. Этот естественный путь связан, однако, с громоздкими выкладками, которых мы избегнем при помощи некоторых косвенных соображений.

Как и всякая функция Грина оператора $\dfrac{d^n}{dt^n}$ при двухточечных краевых условиях, $G_{n-k,k}$ имеет вид

$$G_{n-k,k}(t,s) = \begin{cases} P(t,s) & (a \leqslant t \leqslant s \leqslant b), \\ P(t,s) + \dfrac{1}{(n-1)!}(t-s)^{n-1} & (a \leqslant s \leqslant t \leqslant b), \end{cases} \tag{3.6}$$

где $P(t,s)$ — многочлен от t, s, степень которого по t не выше $n-1$. Последнее справедливо также и для $P(t,s)$ как многочлена от s, поскольку

$$(-1)^n G_{n-k,k}(s,t) = G_{k,n-k}(t,s) \tag{3.7}$$

есть функция Грина для $\dfrac{d^n}{dt^n}$ при сопряженных краевых условиях. Итак,

$$\text{степень } P(s,s) \text{ не превосходит } 2n-2. \tag{3.8}$$

В силу краевых условий $G_{n-k,k}$ как функция t имеет $(n-k)$-кратный нуль по t при $t=a$, а из (3.7) вытекает также, что $G_{n-k,k}$ имеет k-кратный нуль как функция s при $s=a$. Отсюда, согласно (3.6), имеем для $P(t,s)$ следующие представления:

$$P(t,s) = (t-a)^{n-k}Q(t,s), \tag{3.9}$$

$$P(t,s) = (s-a)^k R(t,s) - \frac{1}{(n-1)!}(t-s)^{n-1}, \tag{3.10}$$

где Q, R — некоторые многочлены.

Вычислим производные $P(t,s)$ до $n-1$-го порядка включительно в точке $t=s=a$. Если $i<n-k$, то в силу (3.9)

$$\left.\frac{\partial^{i+j}P}{\partial t^i \partial s^j}\right|_{t=a} = 0. \tag{3.11}$$

Далее, если $j<k$, то в силу (3.10)

$$\left.\frac{\partial^{i+j}P}{\partial t^i \partial s^j}\right|_{s=a} = \frac{(-1)^{j+1}}{(n-i-j-1)!}(t-a)^{n-i-j-1} \qquad (i+j \leqslant n-1). \tag{3.12}$$

При любых i, j, таких, что $i+j\leqslant n-1$, выполнено хотя бы одно из неравенств $i<n-k$, $j<k$. Поэтому из (3.11), (3.12) определяются все интересующие нас производные:

$$\left.\frac{\partial^{i+j}P}{\partial t^i \partial s^j}\right|_{t=s=a} = \begin{cases} 0 & \text{при } i+j<n-1 \text{ или } i<n-k, \\ (-1)^{j+1} & \text{при } i+j=n-1,\ i\geqslant n-k. \end{cases} \tag{3.13}$$

Отсюда, в частности,

$$dP = d^2P = \ldots = d^{n-2}P = 0 \text{ при } t=s=a,$$

так что многочлен $P(s,s)$ должен делиться на $(s-a)^{n-1}$. Так как это же относится и к $G_{n-k,k}(s,s)=P(s,s)$, то из соображений симметрии $P(s,s)$ должен делиться и на $(b-s)^{n-1}$. Учитывая (3.8), получаем

$$P(s,s) = \alpha(s-a)^{n-1}(b-s)^{n-1},$$

где α — постоянная, которую осталось вычислить. Имеем

$$P(s,s) \sim \alpha(b-a)^{n-1}(s-a)^{n-1} \qquad (s\to a). \tag{3.14}$$

С другой стороны, можно найти главную часть $P(s,s)$ при $s\to a$ по формуле Тейлора для $P(t,s)$ в точке $t=s=a$, если воспользоваться соотношениями (3.13):

$$P(s,s) \sim \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j+1}C_{n-1}^j(s-a)^{n-1} = \frac{(-1)^k}{(n-1)!}C_{n-2}^{k-1}(s-a)^{n-1} \quad (s\to a). \tag{3.15}$$

Мы воспользовались известной формулой суммирования биномиальных коэффициентов. Сопоставление (3.14) и (3.15) дает требуемое значение α. Лемма доказана.

Итак, формула (3.4) приобретает вид

$$\sum_i \frac{1}{\lambda_i} = \frac{(-1)^{k+1}}{(n-1)(k-1)!(n-k-1)!(b-a)^{n-1}} \int\limits_a^b (s-a)^{n-1}(b-s)^{n-1} q(s)\,ds. \qquad (3.16)$$

3.3. Достаточным условием невырожденности задачи (3.1)—(3.2) является «малость» $q(t)$ такая, что все собственные значения задачи (3.2)—(3.3) по модулю больше единицы. Поэтому нас будет интересовать оценка снизу модуля первого собственного значения этой задачи, которое обозначим через $\lambda_1[q]$. Если у задачи (3.2)—(3.3) собственные значения отсутствуют (при $q \equiv 0$ это так), будем считать $\lambda_1[q] = \infty$.

Лемма 3.2. *Для любой* $q(t)$

$$|\lambda_1[q]| \geqslant |\lambda_1[|q|]|.$$

Заметим прежде всего, что

$$(-1)^k G_{n-k,k}(t,s) \geqslant 0 \qquad (a \leqslant t, s \leqslant b). \qquad (3.17)$$

Это является следствием многих известных фактов. Проще всего здесь сослаться на вид остаточного члена в интерполяционной формуле Эрмита (см., например, [92]). Применяя эту формулу с узлами a, b кратностей $n-k$, k соответственно к произвольной функции $x(t) \in C^n[a,b]$, удовлетворяющей условиям (3.2), получаем

$$\left(\int\limits_a^b G_{n-k,k}(t,s) x^{(n)}(s)\,ds = \right) x(t) = \frac{x^{(n)}(\xi)}{n!}(t-a)^{n-k}(t-b)^k,$$

где $\xi = \xi(t) \in (a,b)$. Поскольку в качестве $x^{(n)}$ может быть выбрана любая непрерывная положительная функция, отсюда следует (3.17).

Величина $|\lambda_1[q]|^{-1}$ есть спектральный радиус действующего в $C[a,b]$ интегрального оператора

$$Ay = -\int\limits_a^b G_{n-k,k}(t,s) q(s) y(s)\,ds$$

и поэтому, согласно известному мажорантному соображению (см., например, [28]), не превосходит спектрального радиуса оператора

$$\widetilde{A}y = \int\limits_a^b |G_{n-k,k}(t,s) q(s)|\, y(s)\,ds.$$

В силу (3.17)

$$|G_{n-k,k}(t,s) q(s)| = (-1)^k G_{n-k,k}(t,s) |q(s)|,$$

поэтому спектральный радиус $\widetilde{A}$ равен $|\lambda_1[|q|]|^{-1}$, что и доказывает лемму.

3.4. Перейдем непосредственно к получению нужной оценки для $|\lambda_1[q]|$. Положим для краткости

$$I[f] = \frac{1}{(n-1)(b-a)^{n-1}} \int\limits_a^b (s-a)^{n-1}(b-s)^{n-1} f(s)\, ds. \tag{3.18}$$

Теорема 3.1. *При любой* $q(t)$ $(\not\equiv 0)$

$$|\lambda_1[q]| > \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{I[|q|]}. \tag{3.19}$$

Аналогичное неравенство выполняется, конечно, и для остальных собственных значений задачи (3.2)—(3.3).

В силу леммы 3.2 достаточно доказать (3.19) для вещественной $q(t)$, не меняющей знака в (a, b). Так как умножение $q(t)$ на -1 не меняет $|\lambda_1[q]|$, можно считать, что

$$(-1)^{k+1} q(t) \geqslant 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.20}$$

Воспользуемся теперь результатами глубоких исследований Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна по теории осцилляционных ядер [29–31, 93]. Ядро

$$(-1)^k G_{n-k,k}(t, s) \qquad (a \leqslant t, s \leqslant b)$$

является осцилляционным (М. Г. Крейн [30]); поэтому при всякой $q(t)$ $(\not\equiv 0)$, удовлетворяющей условию (3.20), задача (3.2)—(3.3) имеет бесконечное число собственных значений, причем все они положительны. Для нас сейчас важно именно последнее обстоятельство, которое в сочетании с (3.16) дает

$$\frac{1}{\lambda_1} < \sum_i \frac{1}{\lambda_i} = \frac{(-1)^{k+1} I[q]}{(k-1)!(n-k-1)!} = \frac{I[|q|]}{(k-1)!(n-k-1)!}.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Для невырожденности задачи* (3.1)—(3.2) *достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$I[|q|] \leqslant (k-1)!(n-k-1)!. \tag{3.21}$$

3.5. Полученный результат является точным в количественном отношении. Ни при каких k, n постоянная $(k-1)!(n-k-1)!$ не может быть увеличена в (3.19) или в (3.21). Более того, при любых k, n оценка (3.19) и следствие 3.1 перестают быть справедливыми, если в выражении (3.18) для $I[f]$ весовую функцию

$$\rho(s) = (s-a)^{n-1}(b-s)^{n-1} \qquad (a \leqslant s \leqslant b)$$

заменить другой любой функцией $\rho_0(s) \geqslant 0$ такой, что

$$\operatorname{mes}\{\rho_0(s) < \rho(s)\} > 0 \qquad (a \leqslant s \leqslant b). \tag{3.22}$$

Другими словами, *в приведенных формулировках функционал* $I[|q|]$ *является оптимальным среди всех линейных функционалов в* $L_1[a, b]$ *от* $|q(t)|$.

Сказанное интуитивно усматривается из следующего обстоятельства: если «сосредоточить интеграл от $q(t)$» в одной точке $\tau \in (a,b)$, положив $q(t) = \delta(t-\tau)$, то все собственные значения задачи (3.2)—(3.3), кроме одного, «уходят в бесконечность». Таким образом, в этом предельном случае $\lambda_1^{-1} = \sum\limits_i \lambda_i^{-1}$ и неравенство (3.19) переходит в равенство:

$$\lambda_1[\delta(t-\tau)] = (-1)^{k+1}\frac{(n-1)(k-1)!(n-k-1)!(b-a)^{n-1}}{(\tau-a)^{n-1}(b-\tau)^{n-1}} \qquad (a<\tau<b). \tag{3.23}$$

В связи с тем, что дельта-функция не относится к рассматриваемому нами классу суммируемых коэффициентов, приведем скрупулезное обоснование упомянутого выше факта; оно, естественно, будет основано на построении соответствующей «дельтаобразной» последовательности коэффициентов. Итак, пусть измеримая $\rho_0(s) \geqslant 0$ удовлетворяет в $[a,b]$ условию (3.22); положим

$$I_0[f] = \frac{1}{(n-1)(b-a)^{n-1}}\int\limits_a^b \rho_0(s)f(s)\,ds$$

и покажем, что каковы бы ни были n, k $(1 \leqslant k < n \geqslant 2)$, найдется $q(t) \in L_1[a,b]$, удовлетворяющая неравенству

$$|\lambda_1[q]| < \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{I_0[|q|]}. \tag{3.24}$$

Выберем $h>0$ настолько малым, чтобы множество

$$E : \{s \in [a,b],\ \rho_0(s) < \rho(s) - h\}$$

имело положительную меру, и пусть $\tau \in (a,b)$ — некоторая точка плотности E. Пусть, далее, E_ε есть пересечение E с интервалом $(\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)$ и $\chi(E_\varepsilon)$ — характеристическая функция множества E_ε. Согласно выбору τ,

$$\operatorname{mes} E_\varepsilon > 0 \quad \text{при любом } \varepsilon > 0.$$

Положим для $\varepsilon > 0$

$$q_\varepsilon(t) = \frac{1}{\operatorname{mes} E_\varepsilon}\chi(E_\varepsilon) \tag{3.25}$$

и покажем, что в качестве q, удовлетворяющей условию (3.24), может быть выбрана q_ε при достаточно малом ε.

Отметим, во-первых, что из построения $q_\varepsilon(t)$ вытекают соотношения

$$q_\varepsilon(t) \geqslant 0, \quad \int\limits_a^b q_\varepsilon(t)\,dt = 1, \quad 0 \leqslant I_0[q_\varepsilon] < I[q_\varepsilon] - \frac{h}{(n-1)(b-a)^{n-1}}. \tag{3.26}$$

Рассмотрим, далее, как ведут себя при $\varepsilon \to 0$ коэффициенты фредгольмовского знаменателя $D_\varepsilon(\lambda)$ интегрального уравнения

$$x(t) = -\lambda\int\limits_a^b G_{n-k,k}(t,s)q_\varepsilon(s)x(s)\,ds,$$

соответствующего задаче (3.2)—(3.3) с $q = q_\varepsilon$. Так как носитель q_ε сосредоточен в $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$, то, учитывая непрерывность $G_{n-k,k}$ и второе из соотношений (3.26), находим по теореме о среднем

$$\int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b \det \|G_{n-k,k}(t_i, t_j)\|_1^m q_\varepsilon(t_1) \ldots q_\varepsilon(t_m)\, dt_1 \ldots dt_m =$$

$$= \det \|G_{n-k,k}(\tau_i, \tau_j)\|_1^m, \quad \text{где } \tau_r \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon),\ r = 1, \ldots, m. \tag{3.27}$$

Таким образом, для коэффициентов ряда

$$D_\varepsilon(\lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} d_m(\varepsilon) \lambda^m$$

имеем

$$d_1(\varepsilon) \to G_{n-k,k}(\tau, \tau), \qquad d_m(\varepsilon) \to 0, \qquad m = 2, 3, \ldots \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Отсюда видно, что при $\varepsilon \to 0$ наименьший по модулю корень $D_\varepsilon(\lambda)$, т. е. $\lambda_1[q_\varepsilon]$, стремится к $-\dfrac{1}{G_{n-k,k}(\tau, \tau)}$ (остальные же корни стремятся к ∞). Итак, согласно (3.5), (3.18), (3.26)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\lambda_1[q_\varepsilon]|} = |G_{n-k,k}(\tau, \tau)| = \frac{1}{(k-1)!(n-k-1)!} \lim_{\varepsilon \to 0} I[q_\varepsilon] >$$

$$> \frac{1}{(k-1)!(n-k-1)!} \lim_{\varepsilon \to 0} I_0[q_\varepsilon],$$

что и требовалось.

3.6. В дальнейшем $q(t)$ предполагается вещественной. Наряду с классом $T_0 J$ (см. п. 3.1), будем рассматривать также следующие классы операторов L $(= \dfrac{d^n}{dt^n} + \ldots)$:

- $T_{n-k,k} J$ — класс L таких, что для уравнения $Lx = 0$ не вырождены $(n-k, k; t_1, t_2)$-задачи при всех $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$;
- TJ — класс L, для которых на промежутке J справедлива чаплыгинская теорема сравнения

$$\bigl\{s \in J;\ u^{(i)}(s) = v^{(i)}(s),\ i = 0, \ldots, n-1;\ Lu \geqslant Lv\bigr\} \to$$

$$\to u(t) \geqslant v(t) \text{ при } s \leqslant t \in J. \tag{3.28}$$

Ясно, что (3.28) эквивалентно неотрицательности функции Коши $H(t, s)$ при $t, s \in J$, $t \geqslant s$ и что равенство $u^{(n-1)}(s) = v^{(n-1)}(s)$ в (3.28) можно без изменения смысла заменить неравенством $u^{(n-1)}(s) \geqslant v^{(n-1)}(s)$.

Из леммы Пойа вытекает соотношение

$$T_0[a, b] = \bigcap_{k=1}^{n-1} T_{n-k,k}[a, b] \tag{3.29}$$

(напомним, что в T_0, T, $T_{n-k,k}$ по определению включаются операторы порядка n). Другое соотношение, которое нам понадобится, состоит в том, что

$$T_{n-1,1}(a,b) \subset T[a,b]; \tag{3.30}$$

оно становится очевидным, если обратиться к функции Коши. Отметим, что классы $T_{n-1,1}$ и T близки, но при $n > 2$ не совпадают; например, для любого h

$$\frac{d^3}{dt^3} + \frac{d}{dt} \in T(-\infty, \infty) \setminus T_{2,1}[h, h+2\pi].$$

Следствие 3.1 показывает, что

$$\bigl\{ I[|q|] \leqslant (k-1)!(n-k-1)! \bigr\} \to \frac{d^n}{dt^n} + q(t) \in T_{n-k,k}[a,b]. \tag{3.31}$$

В самом деле, величина

$$\frac{(s-a)^{n-1}(b-s)^{n-1}}{(b-a)^{n-1}}$$

убывает как функция a и возрастает как функция b; поэтому (3.21) обеспечивает невырожденность не только $(n-k,k;a,b)$-задачи, но и остальных $(n-k,k)$-задач в промежутке $[a,b]$.

3.7. Представляется правдоподобным, что в (3.31) можно изменить $|q(t)|$ одной из функций

$$q_+(t) = \max\{0, q(t)\}, \qquad q_-(t) = \max\{0, -q(t)\}$$

в зависимости от того, является ли k нечетным или четным соответственно. *Это предположение*, как будет видно, *подтверждается для некоторых случаев, а именно: когда $k=1$ или $k=n-1$, а также когда выполнено неравенство $|n-2k| \leqslant 2$.* Остальные случаи нуждаются в дополнительном исследовании (которое, видимо, не является простым делом). Перечисленные частные случаи охватывают все двухточечные интерполяционные задачи при $n < 7$; они также оказываются достаточными для «отделения» q_+ от q_- в признаках применимости теоремы Чаплыгина и неосцилляции.

Рассмотрим вначале более простой случай $k=1$, к которому случай $k=n-1$ приводится очевидной заменой переменной.

Пусть выполнено неравенство

$$I[q_+] \leqslant (n-2)!.$$

Отсюда, согласно (3.30), (3.31), вытекает, что

$$\frac{d^n}{dt^n} + q_+(t) \in T_{n-1,1}[a,b] \subset T[a,b]. \tag{3.32}$$

Мы должны показать, что в (3.32) q_+ можно заменить на q. Предположим противное; тогда найдется решение $x(t)$ уравнения (3.1) такое, что

$$x^{(i)}(t_1) = \delta_{i,n-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad x(t_2) = 0 \qquad (a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что t_1 и t_2 — соседние нули $x(t)$, т. е.

$$x(t) > 0 \qquad (t_1 < t < t_2). \tag{3.33}$$

Пусть $y(t)$ — решение уравнения $y^{(n)} + q_+(t)y = 0$ такое, что $y^{(i)}(t_1) = \delta_{i,n-1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$; в силу (3.32)

$$y(t) > 0 \qquad (t_1 < t \leqslant b). \tag{3.34}$$

Согласно (3.33),

$$x^{(n)} + q_+(t)x = x^{(n)} + q(t)x + q_-(t)x = q_-(t)x \geqslant 0 \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2),$$

поэтому в силу (3.32) $x(t) \geqslant y(t)$ при $t \in [t_1, t_2]$. Это противоречит (3.34), т. к. $x(t_2) = 0$. Итак, получено

Следствие 3.2. *Справедлива импликация*

$$\bigl\{I[q_+] \leqslant (n-2)!\bigr\} \to \frac{d^n}{dt^n} + q(t) \in T_{n-1,1}[a,b] \subset T[a,b].$$

Независимо от автора [21] это же условие применимости теоремы Чаплыгина получил Ю. В. Комленко [32] с помощью других соображений, основанных на интегральных неравенствах.

3.8. Прежде чем перейти к случаю $|n - 2k| \leqslant 2$ и признаку неосцилляции, остановимся на некоторых вопросах распределения нулей. Начнем со следующего полезного замечания.

Лемма 3.3. *Классам $T_{n-k,k}[a,b]$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, $T_0[a,b]$ соответствуют в пространстве $L_1[a,b] \times \ldots \times L_1[a,b]$ открытые множества коэффициентных вектор-функций $(p_1(t), \ldots, p_n(t))$.*

Ввиду (3.29) достаточно доказать это для $T_{n-k,k}[a,b]$. Предположим противное: пусть для некоторого

$$L = \frac{d^n}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n \in T_{n-k,k}[a,b]$$

существует последовательность

$$L_m = \frac{d^n}{dt^n} + p_{1,m} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + p_{n,m} \notin T_{n-k,k}[a,b], \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{3.35}$$

такая, что

$$\int\limits_a^b |p_{i,m}(t) - p_i(t)|\, dt \to 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (m \to \infty). \tag{3.36}$$

В силу (3.35) при каждом m найдутся такие ξ_m, η_m $(a \leqslant \xi_m < \eta_m \leqslant b)$, что $(n-k, k; \xi_m, \eta_m)$-задача для уравнения $L_m(x) = 0$ вырождена, т. е. обладает нетривиальным решением $x_m(t)$:

$$x_m(\xi_m) = \ldots = x_m^{(n-k-1)}(\xi_m) = x_m(\eta_m) = \ldots = x_m^{(k-1)}(\eta_m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{3.37}$$

Без ограничения общности можно считать, что начальные данные для x_m нормированы и сходятся:

$$x_m^{(i)}(a) \overset{Df}{=} c_{im} \to c_i \quad (m \to \infty); \qquad \sum_{i=0}^{n-1} c_{im}^2 = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 = 1 \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{3.38}$$

а также сходятся последовательности $\{\xi_m\}$, $\{\eta_m\}$:

$$\xi_m \to \xi, \qquad \eta_m \to \eta \qquad (m \to \infty); \qquad \xi, \eta \in [a, b], \qquad \xi < \eta. \tag{3.39}$$

Строгий знак неравенства в (3.39) мотивируется следующим образом. Ввиду (3.36) нормы в $L_1[a, b]$ всех коэффициентов операторов L_m равномерно ограничены; отсюда вытекает (см., например, [94–96]) существование $\varepsilon > 0$ такого, что всякий содержащийся в $[a, b]$ промежуток длины $\leqslant \varepsilon$ является промежутком неосцилляции для всех L_m. Учитывая (3.37), заключаем, что $\eta_m - \xi_m > \varepsilon$ при всех m, откуда $\eta - \xi \geqslant \varepsilon > 0$.

Пусть $x(t)$ — решение уравнения $Lx = 0$, определенное условиями

$$x^{(i)}(a) = c_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.40}$$

Общеизвестно, что из (3.36), (3.38), (3.40) вытекает сходимость $x_m(t)$ к $x(t)$ в $C^{n-1}[a, b]$. Поэтому в (3.37) можно с учетом (3.39) перейти к пределу:

$$x(\xi) = \ldots = x^{(n-k-1)}(\xi) = x(\eta) = \ldots = x^{(k-1)}(\eta) = 0.$$

Но это невозможно, т. к. $L \in T_{n-k,k}[a, b]$ и $x \not\equiv 0$ в силу (3.38), (3.40). Лемма доказана.

Отметим, что класс $T[a, b]$, в отличие от рассмотренных, соответствует замкнутому множеству коэффициентных вектор-функций.

3.9.

Теорема 3.2. *Пусть $L \in T_0[a, b]$ и $x(t)$ — нетривиальное решение уравнения*

$$Lx + q(t)x = 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{3.41}$$

такое, что

$$x(t_i) = \dot{x}(t_i) = \ldots = x^{(r_i-1)}(t_i) = 0 \qquad (r_i \geqslant 1), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.42}$$

где $m \geqslant 2$, $a = t_1 < \ldots < t_m = b$ и числа r_i четны при $1 < i < m$. Пусть, далее, для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_l$ ($a \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_l \leqslant b$; $l \geqslant 0$)

$$(-1)^{r_m}(t - a_1)(t - a_2)\ldots(t - a_l)q(t) \geqslant 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.43}$$

Тогда справедливо неравенство

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m < n + l. \tag{3.44}$$

В случае $m=2$, естественно, отпадает требование четности r_i; при $l=0$ в левой части (3.43) отсутствуют сомножители $t-a_i$. Теорема 3.2 обобщает один результат Я. Микусинского [33], рассмотревшего случай $L=\dfrac{d^n}{dt^n}$, $l=0$, $q(t)>0$ (при четном r_m), а также формулировку работы [97], относящуюся к случаю $l\leqslant 1$.

Условие (3.43) имеет, очевидно, следующий смысл: число перемен знака $q(t)$ в (a,b) либо меньше l, либо же равно l и тогда (если $l\neq 0$) последний раз $\operatorname{sign} q$ должен меняться с $(-1)^{r_m+1}$ на $(-1)^{r_m}$. Сказанное не вполне точно, т. к. суммируемая функция $q(t)$ определена с точностью до множества нулевой меры (неравенство (3.43), как и подобные ему соотношения, предполагается выполненным почти всюду). Это обстоятельство, а также тот факт, что $q(t)$ может аннулироваться в $[a,b]$ на множестве положительной меры, осложняют изложение; мы избавимся от них, перейдя к случаю, когда $q(t)$ непрерывна и удовлетворяет строгому неравенству

$$(-1)^{r_m}(t-a_1)\dots(t-a_l)q(t)>0 \qquad (a\leqslant t\leqslant b;\ t\neq a_1,\dots,a_l). \tag{3.45}$$

Покажем, что общность этим не ограничивается. В самом деле, удовлетворяющую нестрогому неравенству (3.42) $q\in L_1[a,b]$ можно с любой точностью аппроксимировать в $L_1[a,b]$ функцией $\widetilde{q}\in C[a,b]$, для которой выполняется строгое неравенство. Если же q и $\widetilde{q}$ достаточно близки в $L_1[a,b]$, то, согласно лемме 3.3,

$$\widetilde{L}=L+q(t)-\widetilde{q}(t)\in T_0[a,b],$$

так что от (3.41) можно перейти к эквивалентному уравнению $\widetilde{L}x+\widetilde{q}(t)x=0$. Итак, в дальнейшем $q(t)$ непрерывна и удовлетворяет соотношению (3.45).

Введем некоторые обозначения:

- $\varphi_u[a,b]$ — число нулей в $[a,b]$ функции $u(t)$ с учетом кратности; в частности, $\varphi_u t_0$ — кратность нуля $u(t)$ в точке $t=t_0$;
- $\psi_u[a,b]$ — число геометрически различных нулей $u(t)$ в $[a,b]$;
- $\chi_u[a,b]$ — число перемен знака $u(t)$ в интервале (a,b); $\chi_u t_0=0$ при четном $\varphi_u t_0$ и $\chi_u t_0=1$ при нечетном $\varphi_u t_0$.

Пусть $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_{m_1}$ — последовательные нули $x(t)$ в промежутке $[a,b]$:

$$1\leqslant\varphi_x\tau_i\leqslant n-1,\qquad i=1,2,\dots,m_1=\psi_x[a,b]\ (\geqslant m),$$

$$a=\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_{m_1}=b,\qquad \sum_{i=1}^{m_1}\varphi_x\tau_i=\varphi_x[a,b].$$

Среди $\tau_1,\dots,\tau_{m_1}$ содержатся, в частности, точки $t_1,\dots,t_m$. Легко видеть, что

$$\varphi_x\tau_i-\chi_x\tau_i\geqslant 0\qquad (1\leqslant i\leqslant m_1),\qquad \varphi_x t_i-\chi_x t_i\geqslant r_i\qquad (1<i<m). \tag{3.46}$$

Первое из этих неравенств очевидно, второе же вытекает из (3.42), поскольку равенство $\varphi_x t_i=r_i$ влечет за собой $\chi_x t_i=0$ ввиду четности r_i.

Учитывая (3.46), находим

$$\varphi_x[a,b]-\chi_x(a,b)=\sum_{i=1}^{m_1}\varphi_x\tau_i-\sum_{i=2}^{m_1-1}\chi_x\tau_i=\varphi_x a+\varphi_x b+\sum_{i=2}^{m_1-1}(\varphi_x\tau_i-\chi_x\tau_i)\geqslant$$
$$\geqslant r_1+r_m+\sum_{i=2}^{m-1}(\varphi_x\tau_i-\chi_x t_i)\geqslant\sum_{i=1}^{m}r_i. \tag{3.47}$$

Так как $L \in T_0[a,b]$, то имеет место разложение Пойа – Маммана [38, 39]:

$$L = h_n \frac{d}{dt} h_{n-1} \frac{d}{dt} \dots h_1 \frac{d}{dt} h_0 \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

(операции производятся справа налево), где $h_0(t), \dots, h_n(t)$ — положительные и достаточно гладкие в $[a,b]$ функции (именно, h_n, $h_i^{(n-1-i)}$, $i = 0, \dots, n-1$ абсолютно непрерывны в $[a,b]$).

Положим

$$h_k \frac{d}{dt} h_{k-1} \dots h_1 \frac{d}{dt} h_0 x = y_k, \qquad k = 0, 1, \dots, n.$$

Функции $y_k(t)$ не аннулируются ни на каком подынтервале промежутка $[a,b]$, т. к. иначе имело бы место то же самое для функции

$$y_n(t) = Lx = -q(t)x(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{3.48}$$

вопреки (3.45). Ввиду непрерывности h_n, q, x равенство (3.48) выполнено не только почти всюду, но и всюду в промежутке $[a,b]$.

Пусть m_j есть число индексов i, для которых $\varphi_x \tau_i \geqslant j$. Очевидно,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} = \varphi_x[a,b], \qquad m_n = 0. \tag{3.49}$$

Применяя теорему Ролля, находим последовательно

$$\psi_{y_0}[a,b] \; (= \psi_x[a,b]) \; = m_1, \quad \psi_{y_i}[a,b] \geqslant \psi_{y_{i-1}}[a,b] - 1 + m_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{3.50}$$

Складывая эти соотношения, получаем с учетом (3.49)

$$\psi_{y_{n-1}}[a,b] \geqslant m_1 + \dots + m_{n-1} - n + 1 = \varphi_x[a,b] - n + 1.$$

Отсюда

$$\chi_{y_n}(a,b) \geqslant \varphi_x[a,b] - n. \tag{3.51}$$

С другой стороны, в силу (3.43) и (3.48),

$$\chi_{y_n}(a,b) \leqslant \chi_q(a,b) + \chi_x(a,b) \leqslant l + \chi_x(a,b). \tag{3.52}$$

Сопоставляя (3.47), (3.51) и (3.52), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} r_i \leqslant \varphi_x[a,b] - \chi_x[a,b] \leqslant n + l.$$

Чтобы завершить доказательство (3.44), осталось привести к противоречию случай

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n + l. \tag{3.53}$$

Пусть (3.53) выполнено. Это возможно лишь в том случае, если выписанные выше нестрогие неравенства выполняются со знаком равенства. Начнем с (3.52), откуда, в силу сказанного,

$$\chi_q(a,b) = l.$$

Таким образом, все точки a_i, фигурирующие в (3.45), лежат внутри (a,b), поэтому

$$(-1)^{r_m} q(b-\varepsilon) > 0 \quad \text{при малых } \varepsilon \geqslant 0. \tag{3.54}$$

Переходя к (3.47), получаем, что в случае знака равенства $\varphi_x(b) = r_m$. Без ограничения общности можно считать, что

$$x^{(r_m)}(b) > 0, \tag{3.55}$$

откуда

$$(-1)^{r_m} x(b-\varepsilon) > 0 \quad \text{при малых } \varepsilon > 0. \tag{3.56}$$

Из (3.55) вытекает также ввиду (3.42), что

$$y_{r_m}(b) = h_{r_m}(b) h_{r_m-1}(b) \dots h_0(b) x^{(r_m)}(b) > 0. \tag{3.57}$$

Согласно (3.42) и (3.53), $\varphi_x[a,b] \geqslant n$, $\psi_x[a,b] \geqslant 2$, откуда

$$\psi_{y_i}[a,b] \geqslant 2, \qquad i = 0, 1, \dots, n-2, \qquad \psi_{y_{n-1}}(a,b) \geqslant 1. \tag{3.58}$$

Обозначим первый из нулей $y_i(t)$ в $[a,b]$ через ξ_i $(i \leqslant n-1)$ и покажем, что

$$(b =)\ \xi_{r_m-1} > \xi_{r_m} > \dots > \xi_{n-2} > \xi_{n-1}\ (> a), \quad \varphi_{y_i}\xi_i = 1 \quad \text{при } r_m \leqslant i \leqslant n-2. \tag{3.59}$$

В самом деле, во всех неравенствах (3.50) опять-таки имеет место знак равенства, откуда следует, что:

1) y_i не имеет нулей в полуинтервале $(\xi_{i-1}, b]$ $(r_m < i < n)$;

2) в открытом интервале между соседними нулями y_{i-1} лежит ровно один нуль y_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, причем, если $i \leqslant n-2$, этот нуль простой.

Согласно (3.42) и (3.55), $\xi_{r_m-1} = b$ — простой нуль для y_{r_m-1}; поэтому ξ_{r_m} — нуль y_{r_m}, лежащий строго между соседними нулями y_{r_m-1} и, следовательно, также простой (если $r_m < n-1$). Продолжая это рассуждение с учетом (3.58), переходим к y_{r_m+1} и т. д., пока не дойдем до лежащего между соседними нулями $y_{n-2}(t)$ нуля ξ_{n-1} функции $y_{n-1}(t)$.

Отталкиваясь от (3.57) и используя соотношения

$$y_i(t) = h_i(t)\dot{y}_{i-1}(t), \qquad h_i(t) > 0 \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

находим последовательно ($\varepsilon > 0$ достаточно мало):

$$\dot{y}_{r_m}(\xi_{r_m}) > 0,\ \dot{y}_{r_m+1}(\xi_{r_m+1}) > 0,\ \dots,\ \dot{y}_{n-2}(\xi_{n-2}) > 0,\ y_{n-1}(\xi_{n-1}+\varepsilon) > 0.$$

Последнее соотношение показывает, что

$$y_n(\xi) = h_n(\xi)\dot{y}_{n-1}(\xi) > 0 \quad \text{для некоторого } \xi \in (\xi_{n-1}, b). \tag{3.60}$$

Наконец, используя знак равенства в (3.51), замечаем, что $y_n(t)$ не имеет перемен знака в (ξ_{n-1}, b). Отсюда, в силу неравенства (3.60),

$$y_n(b-\varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{при малых } \varepsilon > 0. \tag{3.61}$$

Полученное противоречие между (3.48), (3.54), (3.56), (3.61) завершает доказательство теоремы.

3.10. В частном случае $l = 0$, $m = 2$ теорема 3.2 дает:

$$\{L \in T_0[a,b],\ q(t) \geqslant 0 \text{ в } [a,b]\} \to L + (-1)^k q(t) \in T_{n-k,k}[a,b]. \tag{3.62}$$

В дальнейшем будет использована только эта импликация. Заметим, что ее можно было получить короче, сославшись на упоминавшиеся выше работы М. Г. Крейна [30, 31], согласно которым при выполнении предпосылки импликации (3.62) все собственные значения задачи $Lx + \lambda q(t)x = 0$ с краевыми условиями (3.2) совпадают по знаку с $(-1)^{k+1}$. Мы привели выше непосредственное доказательство, поскольку в приложениях важны и другие частные случаи теоремы 3.2 (не вытекающие из результатов работ [30, 31]). В первую очередь это относится к случаю $l = 1$, $m = 2$, на чем, однако, подробнее здесь не останавливаемся.

Вернемся к (3.31) в предположении

$$|n - 2k| \leqslant 2. \tag{3.63}$$

Это неравенство означает, что k есть ближайшее к $n/2$ среди целых чисел той же четности, что и k. Поэтому

$$(k-1)!(n-k-1)! \leqslant (l-1)!(n-l-1)! \tag{3.64}$$

для l одной четности с k $(1 \leqslant l \leqslant n-1)$.

Пусть, например, k четно и выполнено неравенство

$$I[q_-] \leqslant (k-1)!(n-k-1)!. \tag{3.65}$$

Тогда, в силу (3.64), это неравенство остается в силе при замене k на любое четное l и поэтому, согласно (3.31),

$$\frac{d^n}{dt^n} - q_-(t) \in T_{n-l,l}[a,b] \tag{3.66}$$

при любом четном l. При нечетных же l (3.66) непосредственно вытекает из (3.62), т. к. $\dfrac{d^n}{dt^n} \in T_0[a,b]$. Итак, согласно (3.29),

$$\frac{d^n}{dt^n} - q_-(t) \in T_0[a,b].$$

Вторично применяя (3.62), получаем

$$\frac{d^n}{dt^n} + q(t) = \left[\frac{d^n}{dt^n} - q_-(t)\right] + q_+(t) \in T_{n-l,l}[a,b]$$

для всех четных l и, в частности, для $l = k$. Таким образом, при четных k, удовлетворяющих условию (3.63), в (3.31) можно заменить $|q|$ на q_-.

Аналогично, если при нечетном k, удовлетворяющем условию (3.63),

$$I[q_+] \leqslant (k-1)!(n-k-1)!, \tag{3.67}$$

то с учетом (3.64), (3.62), (3.29) находим:

$$\frac{d^n}{dt^n} + q_+(t) \in T_0[a,b],$$

откуда в силу (3.62)

$$\frac{d^n}{dt^n} + q(t) = \left[\frac{d^n}{dt^n} + q_+(t)\right] - q_-(t) \in T_{n-l,l}[a,b]$$

для всех нечетных l и, в частности, для $l = k$.

3.11. Проведенное рассуждение, позволяющее разделить в (3.31) q_+ и q_- для некоторых k, является в то же время завершающим звеном в доказательстве следующего предложения (которое было основной целью данного параграфа).

Теорема 3.3. *Справедлива импликация*

$$\bigl\{I[q_+] \leqslant \alpha_n,\ I[q_-] \leqslant \beta_n\bigr\} \to \frac{d^n}{dt^n} + q(t) \in T_0[a,b], \tag{3.68}$$

где числа α_n, β_n ($n \geqslant 2$, $\beta_2 = \infty$) определены равенствами

$$\alpha_{2m+1} = \beta_{2m+1} = (m-1)!m!, \qquad \alpha_{4m+2} = [(2m)!]^2,$$

$$\alpha_{4m} = (2m-2)!(2m)!, \qquad \beta_{4m+2} = (2m-1)!(2m+1)!, \qquad \beta_{4m} = [(2m-1)!]^2.$$

В самом деле, легко видеть, что α_n (β_n) равно $(k-1)!(n-k-1)!$, где k — нечетное (четное) число, удовлетворяющее условию (3.63). Поэтому, как показано в предыдущем пункте, неравенство $I[q_+] \leqslant \alpha_n$ обеспечивает включение оператора $\dfrac{d^n}{dt^n} + q$ в классы $T_{n-l,l}[a,b]$ при всех нечетных l, а неравенство $I[q_-] \leqslant \beta_n$ — аналогичное включение при четных l. Остается сослаться на (3.29).

Относительно количественной точности теоремы 3.3 (равно как и следствия 3.2) сохраняется сказанное выше по поводу теоремы 3.1 и следствия 3.1: ни при каком n в (3.68) нельзя увеличить α_n или β_n и, более того, при данных α_n, β_n функционалы $I[q_+]$, $I[q_-]$ являются строго минимальными среди всех линейных функционалов от $q_+(t)$, $q_-(t)$, для которых верна импликация вида (3.68). За счет некоторого огрубления можно перейти к более простым характеристикам функций $q_+(t)$, $q_-(t)$. Именно, из (3.68) непосредственно вытекает

Следствие 3.3. *Если выполнены неравенства*

$$\int\limits_a^b q_+(t)\,dt \leqslant \frac{4^{n-1}(n-1)\alpha_n}{(b-a)^{n-1}}, \quad \int\limits_a^b q_-(t)\,dt \leqslant \frac{4^{n-1}(n-1)\beta_n}{(b-a)^{n-1}}, \tag{3.69}$$

то $\dfrac{d^n}{dt^n} + q(t) \in T_0[a,b]$.

Правые части в неравенствах (3.69) по-прежнему нельзя заменить никакими большими постоянными.

Полученный результат был давно известен для $n = 2$, когда условия (3.68), (3.69) принимают соответственно вид:

$$\int\limits_a^b (t-a)(b-t)q_+(t)\,dt \leqslant b-a, \quad \int\limits_a^b q_+(t)\,dt \leqslant \frac{4}{b-a}.$$

Отметим, что в этом случае применение формулы следов носит стандартный характер, т. к. после замены, согласно теореме Штурма, q на q_+ ядро соответствующего интегрального уравнения становится симметричным (точнее, симметризуемым) и неотрицательно определенным.

3.12. В заключение остановимся на возможных обобщениях и модификациях.

Теорема 3.3 дает признак неосцилляции для двучленного оператора в интегральной форме. Другой естественный подход состоит в том, что на $q(t)$ накладываются двусторонние оценки и используется теорема сравнения В. А. Кондратьева [35]:

$$\left\{\frac{d^n}{dt^n}+q_i\in T_0J,\ i=1,2;\ q_1(t)\leqslant q(t)\leqslant q_2(t)\ \text{в}\ J\right\}\to\frac{d^n}{dt^n}+q\in T_0J. \tag{3.70}$$

Если, как у нас, J — конечный промежуток, в качестве $q_i(t)$ удобно выбирать константы. Обозначим через ξ_n, η_n соответственно $infimum$ и $supremum$ таких $c=\mathrm{const}$, что $\dfrac{d^n}{dt^n}+c\in T_0[0,1]$. Из (3.70) вытекает следующий признак неосцилляции:

$$\left\{\xi_n(b-a)^{-n}<q(t)<\eta_n(b-a)^{-n}\right\}\to\frac{d^n}{dt^n}+q\in T_0[a,b]. \tag{3.71}$$

Очевидно, $\xi_2=-\infty$, $\eta_2=\pi^2$; при $n>2$ вычисление ξ_n, η_n сводится к решению скалярных трансцендентных уравнений. В частности,

$$-\xi_3=\eta_3\approx 75.8;\quad \xi_4\approx-500.5,\quad \eta_4\approx 950.8\quad \text{и т. д.}$$

Объединить оба подхода можно следующим образом. Пусть для простоты $[a,b]=[0,1]$. Вместо уравнения $x^{(n)}+\lambda q(t)x=0$ рассмотрим два уравнения

$$x^{(n)}+c_1x+\lambda[q(t)-c_1]x=0\qquad(0\leqslant t\leqslant 1), \tag{3.72}$$

$$x^{(n)}+c_2x+\lambda[q(t)-c_2]x=0\qquad(0\leqslant t\leqslant 1), \tag{3.73}$$

где c_1, c_2 — некоторые константы из интервала (ξ_n,η_n). Для включения $\dfrac{d^n}{dt^n}+q\in T_0[0,1]$ достаточно наложить на $q(t)$ такие требования, чтобы при четных k положительные собственные значения всех $(n-k,k)$-задач на $[0,1]$ для уравнения (3.72) были больше 1, а при нечетных k это же было верно для (3.73). Вначале рассматриваются частные случаи $q(t)\leqslant c_1$, $q(t)\geqslant c_2$ соответственно; здесь применяется формула следов в сочетании с теоремой М. Г. Крейна[1], после чего, как и выше, осуществляется оптимизация по k и переход к общему случаю. В конечном счете получим признак неосцилляции неулучшаемого характера, основанный на интегральной малости функций $(q(t)-c_1)_-$, $(q(t)-c_2)_+$ и содержащий как теорему 3.3 (при $c_1=c_2=0$), так и признак (3.71), которому соответствует предельный случай $c_1\to\xi_n$, $c_2\to\eta_n$. Формулировка при этом станет значительно более громоздкой; что же касается принципиальной стороны, то в реализованной выше схеме нуждается в изменении лишь этап, относящийся к вычислению функции Грина на диагонали.

Коснемся вкратце еще одного момента. В начале параграфа на $q(t)$ было наложено требование суммируемости в $[a,b]$. Однако в полученных далее формулировках (за исключением следствия 3.3) фигурируют лишь интегралы $I[|q|]$, $I[q_+]$, $I[q_-]$, сходимость которых, очевидно, не исключает несуммируемых особенностей у $q(t)$ в концах $[a,b]$. Возникает естественный вопрос: существенно ли требование $q\in L_1[a,b]$? Не вдаваясь в подробности, отметим, что во многих отношениях оно действительно излишне. В частности, не нуждается в обосновании тот очевидный факт, что после замены в (3.68) $T_0[a,b]$ на $T_0(a,b)$ теорема 3.3 остается в силе для любой вещественной $q(t)$, локально суммируемой в (a,b).

[1] $\dfrac{d^n}{dt^n}+c_i\in T_0[0,1]$ по определению c_i, $i=1,2$.

3. НЕОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$

§ 1. Обсуждение проблематики, связанной с неосцилляцией

1.1. В настоящей главе изучается поведение решений уравнения

$$Lx \equiv x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0 \\ (-\infty \leqslant \alpha < t < \beta \leqslant \infty) \tag{1.1}$$

с вещественными коэффициентами, локально суммируемыми внутри (α, β). В первую очередь нас будет интересовать неосцилляция, а также смежные вопросы распределения нулей и роста решений. Как известно, промежуток $J \subset (\alpha, \beta)$ называется *промежутком неосцилляции* для оператора L (или уравнения (1.1)), если каждое нетривиальное решение уравнения (1.1) имеет в J не более $n-1$ нуля (с учетом кратности). Мы уже сталкивались с неосцилляцией в заключительных разделах обеих предшествующих глав, где, в частности, были указаны точные в количественном отношении признаки неосцилляции для уравнений второго порядка и двучленных уравнений. Настоящая глава посвящена, в основном, качественному изучению неосцилляции и смежных вопросов в общих позиций, т. е. без предположений о порядке и двучленности уравнения, о знаках коэффициентов и т. п.; предположения такого рода будут встречаться лишь в частных следствиях основных теорем.

Разработка связанной с неосцилляцией проблематики восходит к классическим работам Штурма и была продолжена в весьма многочисленных позднейших исследованиях. В разное время (и в разной степени) интересующей нас проблематике уделяли внимание П. Л. Чебышёв, Н. Е. Жуковский, Г. Пойа, Г. Маммана, Ш. Валле-Пуссен, С. А. Чаплыгин, С. Н. Бернштейн, М. Г. Крейн, Я. Микусинский, Ф. Хартман, А. Винтнер, Н. В. Азбелев, О. Арамэ, В. А. Кондратьев, Р. Беллман, а также многие другие. Некоторые из относящихся сюда работ на первый взгляд не имеют между собой почти ничего общего, однако при более близком рассмотрении выясняется, что целый комплекс внешне разнообразных вопросов — дифференциальные неравенства, представление L в виде произведения n вещественных операторов первого порядка, разрешимость интерполяционных краевых задач, вопросы перемежаемости нулей, ляпуновские зоны устойчивости для уравнения Хилла, свойства чебышёвских и декартовых систем функций, осцилляционность (по Гантмахеру—Крейну) функций Грина краевых задач, теоремы о среднем значении и т. п., — все это самым тесным образом связано с вопросом о неосцилляции, который в силу этого занимает одно из центральных мест в качественной теории вещественного уравнения (1.1). Мы постараемся пояснить это в пункте 1.2 настоящего параграфа, где дается обзор основных следствий неосцилляции, обнаруженных различными авторами. Далее, в 1.3 характеризуются предложенные до настоящего времени способы проверки неосцилляции. Таким образом, § 1 носит обзорный характер.

В § 2, предполагая, что (α, β) есть промежуток неосцилляции для L, мы изучаем поведение решений уравнения (1.1) вблизи концов этого интервала. Здесь же вводятся так называемые *обобщенные нули*.

§ 3 посвящен изложению ряда вопросов теории распределения нулей (с основным упором на обобщенные нули).

В § 4 устанавливается критерий неосцилляции в терминах существования $n-1$ функций, удовлетворяющих определенным неравенствам.

Как выясняется в § 5, развитая теория находит эффективное приложение при получении оценок решений уравнения (1.1).

В то время как § 1 занимает несколько обособленное положение, § 2 – § 5 тесно связаны: каждый из последующих параграфов опирается на предыдущие.

В основу настоящей главы положена статья [36]. В заключающем главу дополнении обсуждаются результаты, анонсированные Ф. Хартманом [48] и относящиеся к этому же кругу вопросов.

1.2. Рассмотрим основные следствия неосцилляции и ее связи с различными аспектами качественной теории уравнения (1.1). Через T_0J ниже обозначается класс операторов L, для которых J есть промежуток неосцилляции, а через $\varphi_u J$ — число нулей с учетом кратности функции $u(t)$ на промежутке J (подробный список терминов и обозначений будет дан в конце этого параграфа).

Соотношение $L \in T_0(\alpha, \beta)$ необходимо и достаточно для возможности разложения Пойа—Маммана

$$L = h_n \frac{d}{dt} h_{n-1} \frac{d}{dt} \dots h_1 \frac{d}{dt} h_0 \ \ (\alpha < t < \beta) \tag{1.2}$$

(операции производятся справа налево), *где вещественные функции $h_i(t)$ отличны от нуля и обладают достаточной гладкостью в (α, β)*. Это утверждение (в несколько меньшей общности, см. пункт 2.4) установил Г. Пойа в основополагающей заметке [38], которая будет часто упоминаться в дальнейшем (см. также Г. Маммана [39]). Отметим, что если допускать комплекснозначные $h_i(t)$, то разложение (1.2), как известно, осуществимо всегда, вне зависимости от неосцилляции или каких-либо иных условий; однако такая комплексная факторизация представляет значительно меньший интерес для приложений, чем вещественная.

Разложение Пойа—Маммана позволяет, в частности, получить обобщенную теорему Ролля для промежутка неосцилляции $J \subset (\alpha, \beta)$

$$\{L \in T_0J,\ \varphi_x J \geqslant n+1,\ Lx = f \in CJ\} \to \varphi_f J \geqslant 1 \tag{1.3}$$

и вытекающую отсюда теорему о среднем значении (Г. Пойа [38], см. также [98], [99]).

Непосредственно ясна связь между неосцилляцией и интерполяционными вопросами. В частности, соотношение $L \in T_0J$ эквивалентно, очевидно, утверждению «фундаментальная система решений (1.1) является строго чебышёвской на J» (см. 1.4, 26°), причем, если J — интервал или полуинтервал, то слово «строго» может быть опущено. Относительно связи с декартовыми системами см. 2.7, а также 4.2, где будет идти речь о модификации одного результата С. Н. Бернштейна [43, 44], относящегося к так называемым базам чебышёвских систем. М. Г. Крейн [100] применил соображения, связанные с неосцилляцией (для операторов с постоянными коэффициентами), в теории наилучшего приближения периодических функций.

Рассмотрим, далее, интерполяционную краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &Lx = f(t);\ \ x^{(i)}(t_j) = c_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots, k_j - 1;\ j = 1, 2, \dots, m),\\ &\quad (a \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_m \leqslant b, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_m = n).\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Ее часто называют также задачей Валле-Пуссена (что не совсем оправдано, поскольку до Валле-Пуссена подобные задачи рассматривались многими математиками). В важном частном случае простых узлов — $m = n$ — интерполяционная задача сводится к отысканию решения, принимающего в n заданных точках заданные значения. Общий случай является в определенном смысле предельным для задач с простыми узлами при неограниченном сближении последних.

Условие $L \in T_0[a,b]$, очевидно, необходимо и достаточно для разрешимости всех задач вида (1.4). Более того, при этом условии, помимо самого факта существования функции Грина $G(t,s)$ любой (однородной) интерполяционной задачи, можно утверждать также, что $G(t,s)$ *совпадает по знаку с произведением*

$$(t-t_1)^{k_1}(t-t_2)^{k_2}\dots(t-t_m)^{k_m}$$

в квадрате $t,s \in (a,b)$. Это обстоятельство, отмечавшееся Е. С. Чичкиным [101] и автором [27] (см. также [88, 102]) и являющееся довольно непосредственным следствием результатов Пойа (см. ниже лемму 4.2), может быть очевидным образом переформулировано в виде теоремы о дифференциальных неравенствах для интерполяционных краевых задач. В частности, для задачи с начальными условиями, в которую переходит (1.4) при $m = 1$, *неосцилляция обеспечивает справедливость теоремы сравнения Чаплыгина: при* $L \in T_0(a,b)$

$$\left\{\begin{array}{c} u^{(k)}(a) = v^{(k)}(a),\ k = 0,1,\dots,n-1; \\ Lu \geqslant Lv \ \text{ в } \ [a,b] \end{array}\right\} \to u(t) \geqslant v(t) \ \text{ в } \ [a,b]. \tag{1.5}$$

Это очевидно и непосредственно, ввиду неотрицательности функции Коши $K(t,s)$ при $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$. Отметим, что неосцилляция не является необходимым условием для (1.5) (этот вопрос, кстати, упоминается Э. Беккенбахом и Р. Беллманом в [99] как нерешенный), о чем свидетельствует простой пример:

$$L = \frac{d^3}{dt^3} + \frac{d}{dt}, \quad b - a > 2\pi.$$

Пусть $T[a,b]$ — класс операторов L, для которых справедлива теорема Чаплыгина (1.5). Соотношением $T_0(a,b) \subset T[a,b]$ отнюдь не исчерпывается связь между классами T, T_0; в частности, легко показать, что

$$\bigl\{L \in T_0(a,b), q(t) \leqslant 0 \text{ в } [a,b]\bigr\} \to L + q \in T[a,b].$$

Более интересен случай $q(t) \geqslant 0$; в этом направлении может быть показано следующее. *Пусть* $L \in T_0(a,b)$ *и выполнено одно из условий:*

1) $q(t) \geqslant 0$;

2) n *четно и* $q(t)$ *имеет на* (a,b) *одну, и притом убывающую, перемену знака.*

Тогда для соотношения $L + q \in T[a,b]$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала* $z(t)$ *такая, что*

$$\varphi_z a \geqslant n - 2, \quad z > 0, \quad Lz \leqslant 0 \quad (a < t < b).$$

Это предложение было сформулировано в [97][1]. Для $L = \dfrac{d^n}{dt^n}$ случай 1) был ранее рассмотрен Я. Микусинским [33], рассуждения которого после некоторой модификации переносятся на произвольные $L \in T_0(a, b)$; случай 2) требует более тонких рассмотрений[2].

Неосцилляция полезна при получении теорем о дифференциальных неравенствах также для других типов краевых условий и, в частности, для периодической краевой задачи (по этому поводу см. [103–106]). Относительно отличных от интерполяционных краевых задач, которые всегда разрешимы на промежутке неосцилляции, см. Р. Беллман [107] (интегральные краевые условия), В. А. Чуриков [108] (двухточечные условия).

Будучи составной частью общей теории распределения нулей решений (1.1), вопрос о неосцилляции, естественно, связан с другими аспектами этой теории, из которых здесь коснемся двух: условий принадлежности L классам $T_{i,k}J$ и вопросов перемежаемости нулей. По определению, $L \in T_{i,k}J$ $(i + k \geqslant n)$, если ни для каких $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ из промежутка J не существует нетривиальных решений $x(t)$ уравнения (1.1) таких, что $\varphi_x t_1 \geqslant i$, $\varphi_x t_2 \geqslant k$. Как известно, при любом фиксированном n $T_0 J = \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} T_{i,n-i} J$ (более содержательное утверждение дается ниже теоремой 3.3), $T_{n-1,1} J \subset TJ$. Некоторые достаточные условия включения $L + q \in T_{i,k}J$, где $L \in T_0 J$, можно найти, например, в [97]. Отметим, что условие $L \in T_{k,k}J$ для формально самосопряженных операторов порядка $n = 2k$ И. М. Глазман называет неосцилляторностью на J; он исследовал (см. [109]) связь между неосцилляторностью на (t_0, ∞) и спектром L в соответствующем гильбертовом пространстве функций, а также получил ряд эффективных признаков осцилляторности и неосцилляторности на полуоси. Ясно, что неосцилляция (для формально самосопряженных операторов) влечет за собой неосцилляторность по И. М. Глазману, но не обратно; помимо случая $n = 2$, эти понятия совпадают, в частности, для $L = \dfrac{d^4}{dt^4} + \dfrac{d}{dt}\left(p\dfrac{d}{dt}\right) + q$, где $p(t)$, $q(t) \leqslant 0$. Некоторые свойства самосопряженных операторов из класса $T_{k,k}J$ изучались также в более ранней статье М. Г. Крейна [110].

В связи с перемежаемостью нулей остановимся на интересной работе В. А. Кондратьева [46], установившего, в частности, для $L = \dfrac{d^n}{dt^n} + q$, где $n = 3, 4$ и $q(t)$ строго знакопостоянна, теоремы типа: *между соседними нулями решения уравнения* $Lx = 0$ *лежит не более* m *нулей любого нетривиального решения этого же уравнения. Здесь* $m = 2$ *при* $n = 3$*;* $m = 3$ *при* $n = 4$, $q(t) < 0$*;* $m = 4$ *при* $n = 4$, $q(t) > 0$. В части, относящейся к $n = 3$, этот результат был распространен А. М. Ахундовым и А. Тораевым [111] на операторы вида $L = \dfrac{d^3}{dt^3} + p\dfrac{d}{dt} + q$, где $p(t) < 0$ и $q(t)$ строго знакопостоянна. Однако естественная граница применимости приведенных теорем В. А. Кондратьева лежит дальше: *они справедливы на промежутке* J *для всех операторов (третьего или четвертого порядка) вида* $L = L_0 + q$*, где* $L_0 \in T_0 J$ *и* $q(t)$ *знакопостоянна в* J. Здесь содержится, в частности, результат [111], поскольку при $p_2(t) \leqslant 0$ на J

$$\frac{d^3}{dt^3} + p_1\frac{d^2}{dt^2} + p_2\frac{d}{dt} = \left(\frac{d^2}{dt^2} + p_1\frac{d}{dt} + p_2\right)\frac{d}{dt} \in T_0 J$$

[1] Требование четности n в [97] по недосмотру пропущено.

[2] Связанных, в частности, с теоремой 3.2 предыдущей главы.

в силу полугруппового свойства класса $T_0 J$, которое вытекает из разложения Пойа—Маммана. Точно так же при $n = 4$ убеждаемся, например, что эти теоремы о перемежаемости нулей остаются в силе для операторов $\dfrac{d^4}{dt^4} + \dfrac{d}{dt}\left(p\dfrac{d}{dt}\right) + q$, где $p(t) \leqslant 0$ и $q(t)$ знакопостоянна ($t \in J$); действительно, из $p(t) \leqslant 0$ на J следует, что

$$\frac{d^4}{dt^4} + \frac{d}{dt}\left(p\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2}{dt^2} + p\right)\frac{d}{dt} \in T_0 J.$$

Обоснование приведенного обобщения в основном следует схеме доказательства В. А. Кондратьева [46] с привлечением соотношения

$$\{L \in T_0 J,\ \ q(t) \geqslant 0 \ \text{ в } \ J\} \to L + (-1)^k q \in T_{n-k,k} J.$$

Упомянем также работы румынских математиков (Е. Молдован [112], О. Арамэ [113] и др.), выяснивших роль неосцилляции в круге вопросов, связанных с известной теоремой В. А. Маркова [114] о сохранении перемежаемости нулей многочленов при дифференцировании.

Много дает неосцилляция при изучении асимптотики решений. Так, в [49] показано, что для уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ с $q(t)$, знакопостоянной вблизи β, вопросы об ограниченности решений в (t_0, β), о стремлении решений к нулю при $t \uparrow \beta$ и некоторые другие задачи того же типа сводятся при $L \in T_0(t_0, \beta)$ к нескольким квадратурам над p, q; в случае осцилляции о таком сведéнии говорить не приходится. Далее, хорошо известно, что вопрос о ляпуновских зонах устойчивости для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ с ω-периодической $q(t)$ тесно связан с расстояниями между нулями решений (о чем уже говорилось в § 4 главы 1; см. по этому поводу [19, 20]); в частности, *все решения ограничены на* $(-\infty, \infty)$*, если* $q(t) (\not\equiv 0)$ *неотрицательна в среднем и* $\dfrac{d^2}{dt^2} + q \in T_0[\tau, \tau + \omega]$ *при любом* $\tau \in [0, \omega)$ (в этом случае мы имеем дело с нулевой зоной устойчивости). Что касается уравнений произвольного порядка, то некоторые применения соображений, основанных на неосцилляции, к асимптотическим оценкам решений, как уже говорилось, будут продемонстрированы в § 5.

Существенная информация об асимптотике содержится, конечно, и в самом факте отсутствия колеблющихся при $t \uparrow \beta$ решений, непосредственно вытекающем из $L \in T_0(t_0, \beta)$. Здесь уместно отметить, что неосцилляционность конца β (т. е. существование $t_0 \in [a, \beta)$ такого, что $L \in T_0(t_0, \beta)$) является при $n \geqslant 3$ более сильным требованием, нежели отсутствие y (1.1) колеблющихся при $t \uparrow \beta$ решений. Поясним это следующим примером. Пусть оператор $L\left(= \dfrac{d^3}{dt^3} + \ldots\right)$ отвечает фундаментальной системе решений

$$x_1 = 1, \quad x_2 = t^{1/2} + \sin t, \quad x_3 = t - 2\cos t.$$

Поскольку вронскиан этой системы

$$2 + \sin t + t^{-1/2}\cos t + \frac{1}{4}t^{-3/2}(1 + 2\sin t) > 0 \ \ (0 < t < \infty),$$

то коэффициенты L непрерывны в $(0, \infty)$. Уравнение $Lx = 0$ не имеет колеблющихся при $t \to \infty$ решений, так как каждое отличное от константы решение ведет себя при больших t либо как $c\,t^{1/2}$, либо как $c\,t$ ($c \neq 0$). В то же время правый конец интервала $(0, \infty)$ не является неосцилляционным; более того, для сколь угодно больших t_0, r

найдется нетривиальное решение $x(t)$ уравнения $Lx = 0$ такое, что $\varphi_x(t_0, \infty) > r$. Чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть на решения вида $t^{1/2} - a^{1/2} + \sin t$ с большим a.

Очень интересна связь между неосцилляцией и теорией осцилляционных ядер, ведущей свое начало от работ О. Келлога (рассматривавшего лишь симметричные ядра) и получившей весьма значительное развитие в работах Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна (см. [29–31, 93]). Упомянутая выше связь обнаружена М. Г. Крейном (строго говоря, у М. Г. Крейна вместо неосцилляции фигурирует возможность разложения (1.2), но, как отмечалось, одно сводится к другому) и иллюстрируется утверждением [30], которое можно сформулировать следующим образом. *Пусть* $G_k(t, s)$ $(a \leqslant t,\ s \leqslant b)$ *— функция Грина оператора* L *при краевых условиях*

$$\varphi_x a \geqslant n - k, \quad \varphi_x b \geqslant k. \tag{1.6}$$

Каждое из ядер $(-1)^k\, G_k(t, s)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ *является осцилляционным в том и только том случае, если* $L \in T_0[a, b]$. Обращаем внимание на различие в терминологии: *неосцилляция* решений эквивалентна *осцилляционности* функций Грина, взятых с соответствующими знаками. Как известно, осцилляционность ядра влечет за собой ряд сильных следствий; в частности, из приведенного результата М. Г. Крейна вытекает, что *задача* $Lx = \lambda r(t)\, x$ $(L \in T_0[a, b],\ r(t) > 0)$ *при краевых условиях (1.6) имеет только вещественные собственные значения, совпадающие по знаку с* $(-1)^k$*, причем* m*-я собственная функция имеет в* (a, b) *ровно* $m - 1$ *нуль* (см. [29, 30]). Итак, хотя доказательства признаков неосцилляции часто напоминают по характеру оценку первого собственного значения, фактически неосцилляция связана с существенно более «глубинными» свойствами оператора L.

Остановимся в этой связи еще на одном идейном моменте. Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн в монографии [93, с. 13] высказывают мнение, что при изучении колебаний (в плане теории осцилляционных ядер) аппарат интегральных уравнений является, сравнительно с дифференциальными уравнениями, «наиболее естественным со всех точек зрения». С этим авторитетным мнением нельзя не согласиться, если иметь в виду изучение следствий осцилляционности функций Грина; однако с точки зрения проверки самого факта осцилляционности дело обстоит иначе — здесь дифференциальные уравнения играют решающую роль, о чем свидетельствуют в первую очередь собственные исследования этих же авторов. Напомним, что осцилляционное ядро $G(t, s)$ $(a \leqslant t, s \leqslant b)$ характеризуется следующими неравенствами: $G(t, s) > 0$ $(a < t, s < b)$ и

$$\det |G(t_i, s_j)|_1^m \geqslant 0 \quad \left(a < \begin{matrix} t_1 < t_2 < \cdots < t_m \\ s_1 < s_2 < \cdots < s_m \end{matrix} < b\right) \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{1.7}$$

причем при $t_i = s_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ неравенства (1.7) должны быть строгими. Прямая проверка выполнения счетного числа неравенств (1.7) для конкретных ядер представляется, за исключением некоторых тривиальных случаев, практически недоступной, и, если бы не существовало косвенных способов такой проверки, теория осцилляционных ядер представляла бы, пожалуй, лишь академический интерес. Существенно, что такие способы имеются, если $G(t, s)$ — функция Грина (с точностью до знака) оператора $L \in T_0(a, b)$ при подходящих краевых условиях. Именно, в [93] показано (гл. III, § 6), что неравенства (1.7) эквивалентны, приблизительно говоря, следующему: интегральный оператор, порожденный ядром $G(t, s) (> 0)$, не повышает числа перемен знака. Эта переформулировка все еще выглядит неэффективной. Однако, переходя далее к обратному дифференциальному оператору L, получаем следующее: оператор L, примененный к гладким функциям, удовлетворяющим краевым условиям, *не понижает* числа перемен знака. А это утверждение при подходящих краевых условиях, скажем при условиях (1.6), проверяется уже без особого труда с помощью разложения (1.2) и соображений типа теоремы Ролля. Как видим, дифференциальное уравнение выступает здесь на первый план. (Аргументация П. Д. Калафати [115] также существенно использует специфику дифференциальных уравнений, хотя и в более завуалированном виде.) Важна и следующая сторона дела, которая до сих пор, по-видимому, не подчеркивалась. Получение «явного» выражения для функции Грина или для разложения (1.2) возможно, очевидно, в том и только том случае, когда известна фундаментальная система решений (1.1). В то же время в приведенной схеме имеет значение лишь существование разложения (1.2), т. е. сам факт неосцилляции, для проверки которого известен ряд эффективных признаков, например, теоремы валле-пуссеновского типа (см. ниже), требующие лишь некоторых оценок для коэффициентов $p_i(t)$ и отнюдь не предполагающие знания фундаментальной системы. Таким образом, в данном случае *признаки неосцилляции не только дают возможность проверять осцилляционность функции Грина $G(t,s)$ (взятой с соответствующим знаком), минуя неравенства (1.7), но, более того, позволяют осуществлять такую проверку, когда даже получение явного аналитического выражения для $G(t,s)$ заведомо невозможно.* Конечно, приведенная схема проверки осцилляционности применима в чистом виде лишь при некоторых краевых условиях; для более широкого класса краевых задач неосцилляция является, вообще говоря, лишь необходимым, но не достаточным условием осцилляционности (с точностью до знака) функции Грина. Однако и в этих случаях, несомненно, могут быть указаны эффективные признаки осцилляционности, не опирающиеся, в отличие от известных, на явное представление L в виде (1.2) (т. е. на знание решений уравнения $Lx = 0$). Эта проблематика представляется весьма перспективной.

1.3. Сделанный выше обзор, как нам кажется, убедительно подтверждает актуальность вопроса об эффективных способах проверки неосцилляции. Известные в этом направлении результаты можно подразделить на несколько типов.

Если оставить в стороне результаты, относящиеся к классическому вопросу о неколебательности при $t \uparrow \beta$ решений уравнений второго порядка, то наиболее многочисленными являются признаки неосцилляции валле-пуссеновского типа [27, 40, 45, 96, 116, 117], отражающие тот факт, что «в малом» неосцилляция всегда имеет место, и формулируемые обычно в виде

$$f(b-a, \|p_1\|, \|p_2\|, \ldots, \|p_n\|) \leqslant 0 \to L \in T_0[a,b], \tag{1.8}$$

зачастую с теми или иными модификациями (строгий знак неравенства, заключение в виде $L \in T_0(a,b)$ и т. п.). Здесь $f(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ — функция, возрастающая по всем аргументам, причем обычно

$$f(0, u_1, u_2, \ldots, u_n) < 0, \quad f(u_0, 0, 0, \ldots, 0) < 0.$$

Нормы для коэффициентов могут выбираться по-разному, например,

$$\|p_i\| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |p_i(t)|, \ \ \|p_i\| = \left\{ \int_a^b |p_i(t)|^k dt \right\}^{1/k} \quad (1 \leqslant k < \infty) \text{ и т. п.} \tag{1.9}$$

Условие $f \leqslant 0$ в (1.8) означает, приблизительно говоря, достаточную близость L к оператору $\dfrac{d^n}{dt^n}$ на $[a,b]$. Первый результат такого рода был получен Валле-Пуссеном [40] (см. также [118]); позднее были найдены различные улучшения и обобщения теоремы Валле-Пуссена; см. ниже пункт 4.5[1]. Как в [40], так и в ряде других работ, наряду с линейными рассматривались также квазилинейные уравнения, которых мы здесь не касаемся. Специфическое достоинство валле-пуссеновских признаков состоит в том, что их условия всегда выполняются на достаточно малом промежутке; точнее, при любых фиксированных L и $a \in (\alpha, \beta)$ посылка импликации (1.8) имеет место, если $b\,(> a)$ достаточно близко к a (предполагается, конечно, что коэффициенты p_i принадлежат соответствующему функциональному пространству; если, например, норма введена первым из равенств (1.9), то p_i должны быть локально ограничены в (α, β)). Некоторые из известных признаков неосцилляции этого типа, главным образом для операторов младших порядков и для двучленных операторов $\dfrac{d^n}{dt^n}+q$, имеют относительно используемых характеристик коэффициентов неулучшаемый характер. Они представляют интерес не только сами по себе, но отчасти и как своеобразный полигон для применения и отшлифовки различных средств оптимизации, среди которых наиболее употребительны: теоремы сравнения чаплыгинского типа, тесно связанные с абстрактной теорией положительных операторов; классическое вариационное исчисление (вместе с вариационными свойствами собственных значений самосопряженных задач); принципы оптимального управления, разработанные школой Л. С. Понтрягина. Укажем некоторые работы, где можно найти признаки неосцилляции неулучшаемого характера: для $\dfrac{d^2}{dt^2} + q$ — [15, 16, 19, 55, 71, 76][2]; для $\dfrac{d^2}{dt^2}+p\dfrac{d}{dt}+q$ — [69, 70, 120, 121]; для операторов третьего порядка [122][3]; для $\dfrac{d^n}{dt^n}+q$ — [21, 35]. В частности, в [35] доказана теорема сравнения

$$\left\{\frac{d^n}{dt^n} + q_i \in T_0 J,\ i = 1,2;\ q_1(t) \leqslant q(t) \leqslant q_2(t) \text{ в } J\right\} \to \frac{d^n}{dt^n} + q \in T_0 J, \tag{1.10}$$

благодаря которой вопрос о неулучшаемом в терминах ξ, η достаточном условии для $\dfrac{d^n}{dt^n} + q \in T_0[a,b]$ при $\xi \leqslant q(t) \leqslant \eta$ (и, в частности, при $|q(t)| \leqslant \eta$) сводится к решению несложных трансцендентных уравнений; в [21] с помощью формулы следов и упоминавшегося выше результата М. Г. Крейна [30] получен довольно тонкий интегральный признак неосцилляции для $\dfrac{d^n}{dt^n} + q$. Вопрос о неулучшаемом признаке неосцилляции валле-пуссеновского типа для операторов общего вида рассмотрен в [123], однако полученный здесь результат носит малоэффективный характер. Позднее, в 4.5, мы еще вернемся к обсуждению отдельных эффективных признаков неосцилляции.

---

[1] Довольно сильное по формулировке предложение валле-пуссеновского типа приведено в [119], но сопровождающее его доказательство содержит кардинальный пробел.

[2] Здесь превалирует терминология, связанная с устойчивостью или с оценкой собственных значений краевых задач; вместо нормы q, ввиду теоремы Штурма, оценивается норма функции $q_+ = \max\{0,\, q(t)\}$ или, более общо, функции $(q+c)_+ = \max\{0,\, q(t)+c\}$, $c = \mathrm{const} < \dfrac{\pi^2}{(a-b)^2}$.

[3] Здесь идет речь о разрешимости задач, краевые условия которых в линейном однородном случае имеют вид $\varphi_x t_1 \geqslant n-1$, $\varphi_x t_2 \geqslant 1$; как известно, при $n = 3$ невырожденность таких задач при любых несовпадающих t_1, t_2 из J эквивалентна неосцилляции на J.

Специфическим недостатком валле-пуссеновских теорем является то, что они пригодны лишь для конечных промежутков. Разумеется, доставляемые этими теоремами условия неосцилляции являются лишь достаточными и, вообще говоря, далеки от необходимых.

С другой стороны, известен [38] критерий неосцилляции, носящий совершенно иной характер и основанный на условии, которое Пойа называет «свойством W» оператора L на данном промежутке. Приведем на этот счет две близкие формулировки. Через $[v_1, v_2, \ldots, v_k](t)$ обозначается вронскиан функций $v_1(t)$, $v_2(t), \ldots,$ $v_k(t)$.

1°. *Пусть* $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. *Для соотношения* $L \in T_0[a, b]$ *необходимо и достаточно, чтобы нашлись решения* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *уравнения (1.1) такие, что*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k](t) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)\,(a \leqslant t \leqslant b). \tag{1.11}$$

2°. *Пусть* E^n *— некоторое* n*-мерное пространство функций из* $C^{n-1}[a, b]$. *Для того чтобы каждая функция* $u(t) \in E^n (u \not\equiv 0)$ *удовлетворяла условию* $\varphi_u[a, b] \leqslant$ $\leqslant n - 1$, *необходимо и достаточно, чтобы в* E^n *нашелся базис* $\{u_i\}$ *такой, что*

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k](t) \neq 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, n) \ \ (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1.12}$$

Строгое знакопостоянство вронскианов существенно: наличие хотя бы изолированных нулей четной кратности может коренным образом изменить ситуацию. Пример: фундаментальной системе $x_1 = t^2$, $x_2 = -t$, $x_3 = t^4 - 5t^2 + 4$ отвечает оператор с непрерывными в $(-\infty, \infty)$ коэффициентами, так как $[x_1, x_2, x_3] = 6t^4 + 8 > 0$; здесь $x_1 = [x_1, x_2] = t^2$, но x_3 имеет на $(-\infty, \infty)$ 4 перемены знака.

Формулировка 1° несколько уступает в общности формулировке 2° ввиду больших требований гладкости (абсолютная непрерывность $(n-1)$-х производных). Более существенным, однако, является следующее неформальное различие. Предложение 2° доставляет с точки зрения теории функций эффективный критерий «строгой чебышёвости» (алгоритм для отыскания соответствующего базиса может быть указан). Критерий 1° естественно рассматривать в плане качественной теории дифференциальных уравнений; поскольку он опирается на знание решений (1.1), то должен квалифицироваться как неэффективный.

Итак, известны эффективные признаки неосцилляции, с одной стороны, и неэффективный критерий — с другой; оптимальный вариант — «эффективный критерий» — здесь заведомо недостижим. Имеется, однако, еще один важный класс теорем, типичным представителем которых является следующий общеизвестный критерий неосцилляции при $n = 2$, также принадлежащий Валле-Пуссену [40]. *Пусть* $n = 2$, $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. *Соотношение* $L \in T_0[a, b]$ *имеет место в том и только том случае, если существует* $z(t) \in C^1_*[a, b]$ *такая, что* $z > 0$, $Lz \leqslant 0\,(a < t \leqslant b)$. Здесь и далее $C^m_* J$ — множество функций с абсолютно непрерывной в J m-й производной. Этот простой факт, почти непосредственно вытекающий из теоремы Штурма, весьма удобен в приложениях. Подобные теоремы, дающие необходимые и достаточные условия тех или иных свойств решений в терминах существования одной или нескольких «пробных» функций $z_i(t)$, удовлетворяющих определенным неравенствам (и, может быть, равенствам типа краевых условий), характерны для многих исследований последнего времени; это связано с общим проникновением дифференциальных и интегральных неравенств в качественную теорию, которое стало особенно интенсивным после известных работ С. А. Чаплыгина (см. [124], а также [125–127]). Критерии подобной структуры мы будем кратко называть *полуэффективными,* исходя из следующего: они не являются эффективными критериями, поскольку отсутствует правило выбора «наилучших» пробных функций для каждого конкретного случая; в то же время называть эти критерии неэффективными также неуместно, поскольку они позволяют посредством конкретизации пробных функций генерировать серию, и в определенном смысле исчерпывающую серию, эффективных признаков. Приблизительно говоря, полуэффективный критерий эффективен как достаточное условие и неэффективен как необходимое. Отсюда, кстати, существенное различие между полуэффективными критериями для A и для не-A: хотя в обоих случаях речь идет в конечном счете об одном и том же, такие критерии часто далеки друг от друга по формулировкам (ср., например, теорему 4.1 и лемму 5.1) и знание одного из них обычно мало помогает при получении другого.

Полуэффективные критерии (приведенное описание их не претендует, конечно, на формальную четкость) могут относиться к разнообразным свойствам решений. Так, выше приводился полуэффективный критерий применимости теоремы Чаплыгина на промежутке J для операторов типа $L+q$, где $L \in T_0 J$, $q(t) \geqslant 0$; в [128] отмечался полуэффективный критерий осцилляции (см. ниже лемму 5.1). С. А. Пак получил [104] полуэффективные критерии знакопостоянства функции Грина краевой задачи Штурма—Лиувилля при $n=2$. Известные теоремы об устойчивости решений уравнения $\dot{X} = F(X,t)$ (X — n-мерный вектор), основанные на существовании функции Ляпунова и допускающие обращение, также могут рассматриваться как полуэффективные критерии устойчивости. Правда, в этом случае пробные функции зависят от $n+1$ переменных, тогда как специфика линейных уравнений позволяет в ряде случаев ограничиться функциями одной переменной; в линейной теории именно такие формулировки представляют, по-видимому, основной интерес. Отметим, что подобный критерий применимости теоремы Чаплыгина для операторов общего вида до сих пор не найден.

Вернемся к неосцилляции. Вопрос о полуэффективном критерии неосцилляции для уравнений порядка $n > 2$ стоял довольно давно и в этом направлении были получены некоторые результаты. Н. В. Азбелев [41] предложил полуэффективный критерий неосцилляции для уравнений третьего порядка; в формулировке, усовершенствованной В. А. Кондратьевым (см. Н. В. Азбелев и З. Б. Цалюк [42]), этот критерий выглядит следующим образом. *Пусть $n=3$, $p_i(t) \in C_*^{2-i}[a,b)$ $(i=1,2)$. Соотношение $L \in T_0[a,b)$ имеет место в том и только том случае, если существуют $z_1, z_2 \in C_*^2[a,b)$ такие, что $z_i(a)=0$, $z_i(t) > 0$ в (a,b) $(i=1,2)$, $Lz_1 \leqslant 0$, $L^* z_2 \geqslant 0$ в (a,b).* Здесь $L^*\Big(= -\dfrac{d^3}{dt^3} + \dots\Big)$ — формально сопряженный к L оператор. Идея, на которой основан этот законченный результат, существенно связана со спецификой случая $n=3$ и не допускает распространения на уравнения произвольного порядка.

Простой полуэффективный критерий неосцилляции для операторов вида $L+q$, где $L \in T_0 J$ $\Big($в частности, для $\dfrac{d^n}{dt^n} + q\Big)$, а $q(t)$ знакопостоянна, был предложен автором в [21]. Однако в общем случае полуэффективный критерий неосцилляции не был известен. Этот пробел был восполнен независимо Ф. Хартманом [48] и автором [36] (см. ниже теорему 4.1 и дополнение в конце главы).

Возможно, не лишено интереса следующее обстоятельство. Сопоставляя приведенные выше критерии Валле-Пуссена (для $n=2$) и Пойа, естественно предположить, что требуемый критерий может заключаться в существовании $z_1(t)$, $z_2(t), \dots,$

$z_{n-1}(t)$, для которых $2n-2$ функций

$$[z_1, z_2, \ldots, z_k], \quad Lz_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

имеют некоторые заданные знаки. Более внимательный анализ, однако, показывает, что это не так: уже при $n = 3$ никакая комбинация знаков четырех функций z_1, $[z_1, z_2]$, Lz_1, Lz_2 на промежутке $[a, b]$ не обеспечивает (без дополнительных предположений) неосцилляции в $[a, b]$ или хотя бы в (a, b). Для получения корректной формулировки систему знакоопределенных вронскианов оказалось необходимым расширить.

1.4. Приведем список систематически применяемых ниже обозначений и терминов. Некоторые из них будет удобнее вводить по ходу изложения. Во избежание недоразумений мы уточняем смысл ряда употребительных терминов с неустановившимся значением. Все величины, как правило, предполагаются вещественными; в дальнейшем это не оговаривается.

1°. Под *промежутком* понимается любое связное непустое подмножество вещественной прямой — конечной или расширенной. Промежутки вида $[a, b]$, т. е. с включенными концами, именуются *отрезками*, промежутки вида (a, b), т. е. без концов, — *интервалами*; $[a, b)$, $(a, b]$, как и обычно, — *полуинтервалы*.

2°. $\varnothing$ — пустое множество.

В 3°–5° J — произвольный промежуток, $J \subset (-\infty, \infty)$.

3°. $C^m J$ — совокупность функций $u(t)$, m-кратно непрерывно дифференцируемых в J. $C[a, b]$, $C^m[a, b]$ рассматриваются так же, как пространства с естественной нормой.

4°. $C^m_* J$ — совокупность функций $u(t)$ таких, что $u^m(t)$ абсолютно непрерывна в J (т. е. в любом отрезке $[a, b] \subset J$).

5°. Выражение «$u(t)$ *знакопостоянна в* J» («$u(t)$ *строго знакопостоянна в* J») означает, что либо $u(t) \geqslant 0$ (> 0) при всех $t \in J$, либо $u(t) \leqslant 0$ (< 0) при всех $t \in J$. Ниже будут неоднократно встречаться соотношения типа $u(t) \geqslant 0$, $u(t) < 0$, $u(t) \not\equiv 0$ ($t \in J$) и т. п., в ситуации, когда на $u(t)$ наложено лишь требование локальной суммируемости в J; в таких случаях следует понимать эти соотношения как выполняющиеся почти всюду в J (подобные оговорки в дальнейшем часто опускаются).

6°. $\varphi_u s$ — кратность нуля функции $u(t)$ в точке $t = s$ ($0 \leqslant \varphi_u s \leqslant \infty$). Точнее, неравенство $\varphi_u s \geqslant m$ означает, что

$$u(s) = \dot{u}(s) = \cdots = u^{(m-1)}(s) = 0, \tag{1.13}$$

а равенство $\varphi_u s = m$ означает, что при выполнении (1.13) $u^{(m)}(s)$ либо отлична от нуля, либо не существует (с последней возможностью, впрочем, мы редко будем сталкиваться). То же обозначение используется для *обобщенной кратности* — см. пункт 2.2.

7°. $\varphi_u J$ — число нулей функции $u(t)$ на промежутке J с учетом кратности.

8°. $\psi_u J$ — число геометрически различных нулей $u(t)$ на промежутке J (ясно, что $0 \leqslant \psi_u J \leqslant \varphi_u J \leqslant \infty$).

9°. $t_u^i J$ — i-й нуль $u(t)$ в J при нумерации в порядке возрастания с учетом кратности ($t_u^1 J \leqslant t_u^2 J \leqslant \ldots \leqslant t_u^k J$, $k = \varphi_u J$).

10°. $t_i^u J$ — i-й нуль $u(t)$ в J при нумерации в порядке возрастания без учета кратности ($t_1^u J < t_2^u J < \cdots < t_r^u J$, $r = \psi_u J$). Обозначения $t_u^i J$, $t_j^u J$ будут встречаться лишь в случаях, когда $i \leqslant \varphi_u J < \infty$, $j \leqslant \psi_u J < \infty$ соответственно, т. е. когда они вполне определены.

11°. $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{pmatrix}$ — минор матрицы A, образованный строками с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцами с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

12°. $[u_1, u_2, \ldots, u_m]$=$[u_1, u_2, \ldots, u_m](t)$ — вронскиан функций $u_1(t)$, $u_2(t), \ldots, u_m(t)$. Часто для вронскианов будут использоваться также следующие записи:

$$[u;\, k \ldots l] = [u_k, u_{k+1}, \ldots, u_l]\ (k \leqslant l),$$
$$[u;\, k \ldots l \backslash m] = [u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{m-1}, u_{m+1}, \ldots, u_l](k \leqslant l).$$

Добавка «$\ldots \backslash m$» указывает, таким образом, на исключение u_m. Неравенство $k \leqslant m \leqslant l$ здесь, вообще говоря, не предполагается: если $m < k$ или $m > l$, то $[u;\, k \ldots l \backslash m] = [u;\, k \ldots l]$. Для удобства полагается, по определению, $[u;\, k \backslash k](t) \equiv 1$.

13°. $I = (\alpha, \beta)$ — фиксированный интервал $(-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty)$; $\overline{I} = [\alpha, \beta]$.

14°. $L = \dfrac{d^n}{dt^n} + p_1(t)\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\dfrac{d}{dt} + p_n(t)$ — фиксированный обыкновенный линейный дифференциальный оператор n-го порядка с вещественными и локально суммируемыми на I (т. е. на каждом отрезке $[a, b] \subset I$) коэффициентами $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ [1].

Отметим, что содержание настоящей работы с очевидными изменениями переносится на операторы несколько более общего вида $p_0(t)\dfrac{d^n}{dt^n} + \cdots + p_n(t)$, где $p_0(t) \geqslant 0$ в I и отношения $\dfrac{p_i(t)}{p_0(t)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ локально суммируемы в I. Игнорируя возможность этого (в сущности, фиктивного) обобщения, ограничимся случаем $p_0(t) \equiv 1$. Напомним, что в этом случае оператор L однозначно восстанавливается по фундаментальной системе $\{x_i\}$ решений уравнения (1.1) формулой

$$Lx \equiv \frac{[x_1, x_2, \ldots, x_n, x]}{[x_1, x_2, \ldots, x_n]}.$$

[1] Единичный оператор при $p_n(t)$ для простоты опускается; это не поведет к недоразумениям, поскольку будут рассматриваться только однородные операторы. Решениями уравнений (1.1), как обычно, называются функции $x \in C_*^{n-1} I$ такие, что $(Lx)(t) = 0$ почти при всех $t \in I$. Для большинства рассматриваемых ниже вопросов нет существенной разницы между случаями непрерывных и локально суммируемых коэффициентов. По этой причине мы не делаем специальных оговорок при ссылках на работы различных авторов, где требование непрерывности коэффициентов формально присутствует, но не влияет по существу ни на формулировки, ни на доказательства результатов.

Будем говорить, что оператор L *отвечает* фундаментальной системе $\{x_i\}$. Ясно, что системе определенных в I функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ в том и только том случае отвечает некоторый оператор L с локально суммируемыми в I коэффициентами, если выполнены два условия:

$$1)\ x_i \in C_*^{n-1} I \ \ (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad 2)\ [x_1, x_2, \ldots, x_n](t) \neq 0 \ \text{ в } \ I.$$

15°. Точка α (β) называется *несингулярным концом* интервала I, если $\alpha > -\infty$ $(\beta < \infty)$ и коэффициенты $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ суммируемы на некотором, а следовательно, и на любом, отрезке вида $[\alpha, t_0]$ $([t_0, \beta])$, где $t_0 \in I$; в противном случае конец α (β) называется *сингулярным.*

16°. Us — окрестность точки $s \in I$, содержащаяся в I, т. е. произвольный интервал вида (s_1, s_2), где $\alpha < s_1 < s < s_2 < \beta$.

17°. U_+s — правая (открытая) полуокрестность точки $s \in [\alpha, \beta)$, содержащаяся в I, т. е. произвольный интервал вида (s, s_1), где $\alpha \leqslant s < s_1 < \beta$. Аналогично, левая полуокрестность U_-s есть интервал вида (s_1, s), где $\alpha < s_1 < s \leqslant \beta$.

18°. Выражения «*вблизи* α», «*вблизи* β» будут часто употребляться взамен выражений «в некоторой $U_+\alpha$», «в некоторой $U_-\beta$» соответственно.

19°. Функция $y(t)$, непрерывная вблизи $\alpha(\beta)$, называется *колеблющейся при* $t \downarrow \alpha$ $(t \uparrow \beta)$, если в любой $U_+\alpha$ $(U_-\beta)$ $y(t)$ не является ни строго знакопостоянной функцией, ни тождественным нулем.

20°. Запись «$f(t) \prec\!\!\prec g(t)$ $(t \uparrow t_0)$» или, что то же самое, «$g(t) \succ\!\!\succ f(t)$ $(t \uparrow t_0)$» означает, что $f(t)$ и $g(t)$ положительны в некоторой U_-t_0 и $f = o(g)$ при $t \uparrow t_0$ (т. е. $\dfrac{f(t)}{g(t)} \to 0$ при $t \uparrow t_0$). Аналогичен смысл соотношений «$f \prec\!\!\prec g(t \downarrow t_0)$», «$g \succ\!\!\succ f(t \downarrow t_0)$» (разумеется, U_-t_0 при этом заменяется на U_+t_0).

21°. $\mathfrak{M}$ — n-мерное пространство решений уравнения (1.1), снабженное какой-либо нормой. $\mathfrak{M}'$ — подмножество $\mathfrak{M}$, состоящее из нетривиальных решений (1.1).

22°. $\mathfrak{N}J$ — совокупность $x \in \mathfrak{M}'$ таких, что $\varphi_x J \geqslant n$.

В обозначениях $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}J$ (и еще некоторых других, которые встретятся позднее) не подчеркнута зависимость от L; это не приведет к недоразумениям, так как пара (I, L) рассматривается как произвольная, но фиксированная.

23°. T_0J — класс операторов L, для которых $\mathfrak{N}J = \varnothing$, т. е. J является *промежутком неосцилляции*. Таким образом, $L \in T_0J \leftrightarrow \mathfrak{N}J = \varnothing$. Будет удобно также считать, что $L \in T_0\, \varnothing$.

Обозначения $\mathfrak{N}J$, T_0J определены пока для $J \subset I$; по поводу случаев $J \subset \overline{I}$ см. пункт 2.2.

24°. α (β) называется *неосцилляционным концом* I и пишется $\overline{\alpha} \neq \alpha$ $(\underline{\beta} \neq \beta)$, если $L \in T_0U_+\alpha$ $(L \in T_0U_-\beta)$ для некоторой $U_+\alpha$ $(U_-\beta)$; в противном случае пишем $\overline{\alpha} = \alpha$ $(\underline{\beta} = \beta)$. Эти записи до 3.3 можно понимать чисто формально. Несингулярный конец, очевидно, всегда является неосцилляционным, но не обратно.

25°. $\overline{s}(\underline{s})$ — *сопряженная к s справа (слева) точка*, см. пункт 3.3.

26°. Система функций $u_i(t) \in C^{m-1}J$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ называется *строго чебышёвской на J*, если всякая нетривиальная (т. е. имеющая хотя бы один ненулевой коэффициент) линейная комбинация $u = c_1u_1 + \cdots + c_mu_m$ удовлетворяет условию $\varphi_uJ \leqslant m - 1$[1]. Разумеется, всякая строго чебышёвская система является чебышёвской.

27°. Декартова система, $(+)$-*декартова система* – см. 2.7.

28°. *ИФС* — см. 2.2; *ДИФС* — см. 4.2.

29°. *Согласованная система* — см. 4.1.

30°. *Критериями* мы называем лишь необходимые и достаточные условия (оставляя для достаточных термин «признак»). О *полуэффективных критериях* см. 1.3.

§ 2. Иерархия решений. Обобщенные нули

В настоящем параграфе исследуется в основном поведение решений в окрестности неосцилляционного конца интервала I. Мы сосредоточим внимание на поведении решений в $U_-\beta$, отмечая попутно необходимые изменения в переформулировках для $U_+\alpha$.

2.1.

Лемма 2.1. *Пусть E^n — некоторое n-мерное пространство непрерывных в I функций. Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) каждая $x \in E^n (x \not\equiv 0)$ строго знакопостоянна вблизи β;

2) в E^n существует базис $\{x_i\}$ такой, что

$$x_1 \prec\!\!\prec x_2 \prec\!\!\prec \ldots \prec\!\!\prec x_n (t \uparrow \beta). \tag{2.1}$$

Импликация 2)$\to$ 1) и линейная независимость функций $x_i(t)$, удовлетворяющих условию (2.1), очевидны; в доказательстве нуждается лишь тот факт, что 1) влечет за собой существование в E^n функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, для которых выполняется (2.1).

Пусть 1) имеет место. Рассмотрим отношение $f(t) = \dfrac{z_1(t)}{z_2(t)}$ любых линейно независимых $z_1, z_2 \in E^n$; в силу 1) и непрерывности z_1, z_2 функция $f(t)$ непрерывна вблизи β. Кроме того, для любого числа c $f(t) \neq c$ вблизи β; это следует из условия 1), отнесенного к $z = z_1 - cz_2$ $(\not\equiv 0)$. Тем самым обеспечено существование предела (конечного или бесконечного) $f(t)$ при $t \uparrow \beta$. Таким образом, для любых z_1, $z_2 \in E^n$, положительных вблизи β, при $t \uparrow \beta$ имеет место лишь одна из трех возможностей: $z_1 \prec\!\!\prec z_2$, $z_1 \succ\!\!\succ z_2$, $z_1 \sim cz_2$ $(0 < c < \infty)$.

Пусть z_1, z_2, …, z_n — линейно независимые и положительные вблизи β функции из E^n. Положим $x_1^1 = z_1$. Пусть уже построена состоящая из линейных комбинаций z_1, z_2, …, z_k система $\{x_i^k\}$ «длины k» $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$: $x_1^k \prec\!\!\prec x_2^k \prec\!\!\prec \ldots \prec\!\!\prec x_k^k$

[1]Отличие от обычного определения чебышёвской системы состоит в том, что здесь фигурируют $C^{m-1}J$, φ_uJ вместо CJ, ψ_uJ соответственно.

$(t \uparrow \beta)$. Тогда система «длины $k+1$» строится так. Сравним z_{k+1} с x_i^k при $t \uparrow \beta$. Возможны два случая: а) при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant k$ выполняется какое-либо из соотношений $z_{k+1} \prec\!\!\prec x_i^k$, $z_{k+1} \succ\!\!\succ x_i^k$; б) для некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ $z_{k+1} \sim c\, x_j^k$ $(0 < c < \infty)$. В первом случае, дополняя систему $\{x_i^k\}$ функцией z_{k+1}, получаем после соответствующей перенумерации систему «длины $k+1$». Во втором случае полагаем $z_{k+1}^1 = \pm(z_{k+1} - c\, x_j^k)$, выбирая знак так, чтобы z_{k+1}^1 была положительной вблизи β, после чего повторяем то же рассуждение с заменой z_{k+1} на z_{k+1}^1. Возможно, и для z_{k+1}^1 осуществится случай б): $z_{k+1}^1 \sim c_1 x_{j_1}^k$; однако при этом заведомо $j_1 < j$ (поскольку $z_{k+1}^1 \prec\!\!\prec x_j^k$), так что не позднее, чем через k шагов, случай б) уступит место а) и мы получим систему «длины $k+1$». Увеличивая таким образом число функций, придем к требуемой системе «длины n».

2.2. Если $\underline{\beta} \neq \beta$, то условие 1) леммы, очевидно, выполняется. Итак, если β является неосцилляционным концом, уравнение $Lx = 0$ обладает фундаментальной системой решений $\{x_i(t)\}$ — мы ее будем называть *иерархической фундаментальной системой (ИФС) при* $t \uparrow \beta$, для которой выполнены соотношения (2.1). Ясно, что ИФС при $t \uparrow \beta$ не единственна; если $\{x_i\}$ — ИФС при $t \uparrow \beta$, то остальные ИФС $\{y_i\}$ при $t \uparrow \beta$ можно получить треугольными линейными преобразованиями $y_i = \sum\limits_{j=1}^{i} c_{ij}\, x_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с положительными $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$. «Минимальное» при $t \uparrow \beta$ решение $x_1(t)$ определено однозначно с точностью до положительного множителя.

Аналогично, если $\overline{\alpha} \neq \alpha$, то существует ИФС $\{x_i\}$ при $t \downarrow \alpha$, т. е. фундаментальная система решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ уравнения $Lx = 0$ такая, что $x_1 \succ\!\!\succ x_2 \succ\!\!\succ \ldots \succ\!\!\succ x_n$ $(t \downarrow \alpha)$. Различие в нумерации для случаев $t \downarrow \alpha$ и $t \uparrow \beta$ удобно по соображениям, которые станут ясны ниже.

Поскольку вместо интервала I можно было рассматривать любой его подынтервал, то для любого $t_0 \in I$ существуют ИФС как при $t \uparrow t_0$, так и при $t \downarrow t_0$. Однако в этом случае, а также в случае несингулярных концов, ИФС могут быть тривиально получены заданием соответствующих начальных условий для $x_i(t)$. Например, для получения ИФС $\{x_i\}$ при $t \uparrow t_0 \in I$ следует выбрать начальные условия для $x_i(t)$ в точке t_0 так, чтобы

$$x_i^{(j)}(t_0) = 0 \ \text{ при всех } \ j < n - i, \quad (-1)^{n-i} x_i^{n-i}(t_0) > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. так, чтобы $\varphi_{x_i} t_0 = n - i$, $x_i(t_0 - 0) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. О начальных условиях в сингулярном конце интервала говорить не приходится (за исключением случая, когда выполнены условия теоремы 1.1 из первой главы); однако эта аналогия с несингулярным случаем подсказывает введение полезного понятия *обобщенного нуля*.

Именно, пусть $\underline{\beta} \neq \beta$, $\{x_i\}$ — ИФС при $t \uparrow \beta$. Условимся каждому $x \in \mathfrak{M}'$ вида $x = o(x_n)$ $(t \uparrow \beta)$ приписывать в точке β нуль кратности $k (\geqslant 1)$, где

$$k \text{ есть максимальное из } \ l \ \text{ таких, что } x = o(x_{n-l+1}) \ (t \uparrow \beta). \tag{2.2}$$

Для остальных $x \in \mathfrak{M}'$ полагаем $\varphi_x \beta = 0$.

Эквивалентное определение $\varphi_x \beta$ можно дать и несколько иначе:

$$\varphi_x \beta = k \longleftrightarrow \Big\{ x = \sum_{i=1}^{n-k} c_i x_i, c_{n-k} \neq 0 \Big\}.$$

Определенное потенциальное преимущество формы (2.2) состоит в том, что такое определение допускает распространение на произвольные функции; это оказывается полезным при исследовании краевых задач для неоднородного уравнения $Lx = f$ с сингулярными краевыми условиями, состоящими в ограничении на порядок роста $x(t)$ при $t \uparrow \beta$. Если $\underline{\beta} \neq \beta$, то такие условия по ряду причин целесообразно трактовать как условия вида $\varphi_x\beta \geqslant l$ с соответствующим значением l; при этом связь между сингулярными и несингулярными краевыми задачами становится чрезвычайно рельефной. В настоящей работе мы не сможем сколько-нибудь подробно остановиться на задачах с обобщенными кратностями в краевых условиях.

Аналогично, если $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\{y_i\}$ — ИФС при $t \downarrow \alpha$, то приписываем в точке α нуль кратности k каждому решению вида $\sum\limits_{i=k+1}^{n} c_i y_i$, $c_{k+1} \neq 0$. Решению $x \equiv 0$ в α и β (как и в остальных точках), естественно, приписывается нуль кратности ∞. Ясно, что для несингулярных концов обобщенная кратность совпадает с обычной.

Всюду в дальнейшем кратности $\varphi_x\alpha$, $\varphi_x\beta$ понимаются исключительно как обобщенные.

Таким образом, если $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$, то, присоединив к I «несобственные» элементы α, β, мы получаем возможность производить подсчет нулей решений на расширенном промежутке $\overline{I} = [\alpha, \beta]$; такие обозначения, как $\varphi_x J$, $\psi_x J$, $T_0 J$ и т. п., распространяются на $J \subset \overline{I}$ естественным образом. То же относится к полуинтервалам $[\alpha, \beta)$ или $(\alpha, \beta]$, если неосцилляционным является лишь один из концов.

Обобщенная кратность имеет много общего с обычной: $0 \leqslant \varphi_x s \leqslant n-1$ для всех $s \in \overline{I}, x \in \mathfrak{M}'$; при любом $s \in \overline{I}$ совокупность $x \in \mathfrak{M}$ таких, что $\varphi_x s \geqslant r$ $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$, образует в $\mathfrak{M}$ $(n-r)$-мерное подпространство. В обоих случаях величина $\varphi_x s$ характеризует скорость убывания (или роста) решения $x(t)$ при $t \to s$: $\dfrac{x(t)}{y(t)} \to 0$ при $t \to s$ $(x, y \in \mathfrak{M}',\ s \in \overline{I})$ в том и только том случае, если $\varphi_x s > \varphi_y s$. Однако здесь имеется одно существенное различие: в несингулярном случае связь между кратностью и ростом является стандартной, в сингулярном же определяется оператором L. Так, если $L = \dfrac{d^2}{dt^2} - 1$, то $\varphi_{e^t}\infty = 0$, тогда как при $L = \dfrac{d^2}{dt^2} - 3\dfrac{d}{dt} + 2$ имеем $\varphi_{e^t}\infty = 1$.

Вот еще несколько примеров. Для фундаментальной системы $\{x_i\}$, по которой определялся оператор L третьего порядка в 1.2, имеем: $\varphi_{x_1}0 = \varphi_{x_3}0 = 0, \varphi_{x_2}0 = 1$. Далее, $\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{c}{t^2} \in T_0[0, \infty]$, если $c < 1/4$; однако $\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{1}{4t^2} \notin T_0[0, \infty]$, так как $\varphi_{\sqrt{t}}0 = \varphi_{\sqrt{t}}\infty = 1$. Точно так же $\dfrac{d^2}{dt^2} \notin T_0[-\infty, \infty]$ поскольку $\varphi_1[-\infty, \infty] = 2$. Вообще, *если L — оператор с постоянными коэффициентами, то $L \in T_0[-\infty, \infty]$ в том и только том случае, если все корни характеристического уравнения вещественны и различны* (для $L \in T_0(-\infty, \infty)$ нужна, конечно, лишь вещественность корней). Доказательство этого факта несложно и предоставляется читателю.

2.3.

Лемма 2.2. *Если $x(t)$, $y(t) \in C^m Us (s \in I)$, $\varphi_x s = m$, $\varphi_y s \geqslant m-1$, то при достаточной малости $|\varepsilon|$ имеем $\varphi_{x+\varepsilon y} Us \geqslant m$.*

На этом очевидном замечании основан специфический прием доказательства, который можно было бы назвать «возмущением нулей» и которым мы дважды воспользуемся ниже (см. также [129]).

Лемма 2.3. $\quad T_0(\alpha,\beta)=T_0(\alpha,\beta]=T_0[\alpha,\beta)$.

Из соображений симметрии достаточно проверить, что $T_0(\alpha,\beta)\subset T_0(\alpha,\beta]$. Итак, пусть $L\in T_0I$ и $\{x_i\}$ — ИФС при $t\uparrow\beta$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_i$ множество $x\in\mathfrak{M}'$ таких, что $\varphi_xI\geqslant i$, $\varphi_x\beta\geqslant n-i$ ($i=1,2,\dots,n$); мы должны доказать, что $\mathfrak{M}_i=\varnothing$ ($i=1,2,\dots,n$). Для $i=n$ это верно, так как $L\in T_0I$. Пусть уже установлено, что $\mathfrak{M}_n=\mathfrak{M}_{n-1}=\dots=\mathfrak{M}_{k+1}=\varnothing$ ($1\leqslant k\leqslant n-1$); покажем, что тогда и $\mathfrak{M}_k=\varnothing$.

Предположим противное: $\mathfrak{M}_k\neq\varnothing$. Пусть $v\in\mathfrak{M}_k$ — решение, максимизирующее ψ_xI по $x\in\mathfrak{M}_k$:

$$r\overset{Df}{=}\psi_vI\geqslant\psi_xI \text{ для всех } x\in\mathfrak{M}_k. \tag{2.3}$$

Поскольку $\mathfrak{M}_{k+1}=\varnothing$, то $\varphi_vI=k$, поэтому $1\leqslant r\leqslant k$. Пусть $t_i=t_i^vI$, $k_i=\varphi_vt_i$ ($i=1,2,\dots,r$) ($k_1+\dots+k_r=k$). Введем в рассмотрение решение $y\in\mathfrak{M}'$ следующим образом. Пусть вначале $r<k$; подчиним $y(t)$ требованиям

$$\varphi_yt_i\geqslant k_i-1\quad(i=1,2,\dots,r), \tag{2.4}$$

$$\varphi_y\beta\geqslant n-k-1, \tag{2.5}$$

$$y(s_1)=y(s_2)=\dots=y(s_r)=0, \tag{2.6}$$

где s_i — какие-либо точки I, отличные от $t_1,\dots,t_r$ и друг от друга. Условия (2.4) — (2.6) определяют в $\mathfrak{M}$ подпространство, размерности не меньшей, чем $n-(k-r)-(n-k-1)-r=1$; поэтому выбор соответствующей $y(t)\not\equiv 0$ возможен. Заметим, что (2.5) допускает следующее уточнение:

$$\varphi_y\beta=n-k-1. \tag{2.7}$$

В самом деле, так как $r<k$, то хотя бы одно из чисел $k_1,\dots,k_r$ больше 1 и, следовательно, в силу (2.4), (2.6) $\psi_yI\geqslant r+1$. С другой стороны, те же соотношения (2.4), (2.6) показывают, что $\varphi_yI\geqslant k$; поэтому неравенство $\varphi_y\beta\geqslant n-k$, означающее, что $y\in\mathfrak{M}_k$, невозможно из-за (2.3).

Мы определили $y(t)$ для случая $r<k$; если же $r=k$ (т. е. если все нули $v(t)$ в I простые), положим $y=x_{k+1}$. Соотношения (2.4), (2.7), а нам только они и понадобятся, выполняются в этом случае тривиальным образом.

Выберем $Ut_1,\dots,Ut_r,U_-\beta$ так, чтобы они попарно не пересекались и $y(t)$ не имела нулей в $U_-\beta$. Положим

$$z(t)=z(t,s)=v(t)-\frac{v(s)}{y(s)}y(t)\quad(s\in U_-\beta).$$

В силу (2.7) $\varphi_v\beta\geqslant n-k>\varphi_y\beta$, так что $\dfrac{v(s)}{y(s)}\to 0\,(s\uparrow\beta)$. Поэтому если s достаточно близко к β, то в соответствии с леммой 2.2 и (2.4)

$$\varphi_zUt_i\geqslant k_i\ (i=1,2,\dots,r).$$

Кроме того,очевидно, что $z(s)=0$, откуда $\varphi_zI\geqslant k+1$. Поскольку $\varphi_z\beta=\varphi_y\beta=n-k-1$, то $z\in\mathfrak{M}_{k+1}=\varnothing$. Мы пришли к противоречию.

Ввиду произвольности I лемму 2.3 можно, конечно, сформулировать и так: $T_0(\alpha_1,\beta_1)=T_0(\alpha_1,\beta_1]=T_0[\alpha_1,\beta_1)$ *для любых* $\alpha_1,\beta_1\in\overline{I}(\alpha_1<\beta_1)$. На подобных очевидных переформулировках (не содержащих ничего нового, кроме букв) впредь не останавливаемся.

Следствие 2.1. *Если $L \in T_0 I$ и $\{x_i\}$ — ИФС при $t \uparrow \beta$, то $[x; 1 \ldots k](t) \neq 0$ в $I\,(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.*

Действительно, если $[x; 1 \ldots k](t_0) = 0$ для некоторых $k (1 \leqslant k \leqslant n-1)$ и $t_0 \in I$, то система уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i^{(j)}(t_0) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1),$$

имела бы нетривиальное решение $c_1, c_2, \ldots, c_k$; тогда для $x = c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k$ $(\not\equiv 0)$ оказалось бы, что $\varphi_x t_0 \geqslant k$, и, поскольку $\varphi_x \beta \geqslant n-k$, что $\varphi_x(\alpha, \beta] \geqslant \varphi_x[t_0, \beta] \geqslant n$, вопреки лемме 2.3.

Аналогично, *если $L \in T_0 I$ и $\{y_i\}$ — ИФС при $t \downarrow \alpha$, то $[y; k \ldots n] \neq 0$ в $I\,(k = 2, 3, \ldots, n)$.*

Следствие 2.2. *Условие $L \in T_0 I$ необходимо и достаточно для того, чтобы оператор L допускал на I разложение (1.2).*

Необходимость доказана в мемуаре Г. Пойа [38] и, независимо, в более поздней работе Г. Маммана [39], частично пересекающейся с [38]. Конкретный вид множителей $h_i(t)$ в (1.2) определяется формулами [38] (см. также [37])

$$h_0 = \frac{1}{w_1},\ h_i = \frac{w_i^2}{w_{i-1} w_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad h_n = \frac{w_n}{w_{n-1}},$$

где $w_0(t) = 1, w_i(t) = [x; 1 \ldots i]\,(i = 1, 2, \ldots, n), \{x_i\}$ — фундаментальная система решений уравнения $Lx = 0$, удовлетворяющая условиям

$$[x; 1 \ldots i](t) \neq 0 \text{ в } I \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2.8}$$

Существование такой фундаментальной системы («свойство W») эквивалентно, таким образом, возможности разложения (1.2). Отметим, что Г. Маммана записывает разложение L в несколько иной форме,

$$L = \left(\frac{d}{dt} - g_n\right)\left(\frac{d}{dt} - g_{n-1}\right) \ldots \left(\frac{d}{dt} - g_1\right),$$
$$g_i(t) = \frac{\dot{w}_i}{w_i} - \frac{\dot{w}_{i-1}}{w_{i-1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $w_i(t)$ имеют прежний смысл; переход от одной формы к другой не составляет труда.

В части, относящейся к достаточности, следствие 2.2 доказано в [38, 39] лишь частично; именно, установлено, что L обладает на I «свойством W» и, следовательно, допускает разложение (1.2), если $L \in T_0[\alpha, \beta)$. Доказывается это в обеих работах одинаково: начальные условия в точке α для $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ выбираются так, чтобы

$$x_i(\alpha) = \dot{x}_i(\alpha) = \cdots = x_i^{(n-i-1)}(\alpha) = 0, \quad x_i^{(n-i)}(\alpha) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

отсюда и из $L \in T_0[\alpha, \beta)$ легко следует (2.8). Этот простой прием применим, очевидно, лишь в случае несингулярности α (или β, поскольку α и β можно поменять ролями). Если же, например, $I = (-\infty, \infty)$, то методика Пойа—Маммана позволяет установить возможность разложения (1.2) на любом полубесконечном промежутке, но не на всей прямой. Поскольку следствие 2.1 не опиралось на несингулярность концов I, то тем самым импликация «$L \in T_0 I \to$ разложение (1.2)» доказана в общем случае.

В связи с этим должна быть упомянута недавняя работа А. И. Перова, где предложен интересный способ доказательства той же импликации, основанный на совершенно иных соображениях, связанных с выпуклостью, и, в частности, на теореме о разделяющей гиперплоскости. Наш способ уступает методу Перова в геометрической наглядности, но зато позволяет попутно установить, что условие (2.8) выполняется, в частности, для ИФС при $t \uparrow \beta$ (или $t \downarrow \alpha$, при соответствующей перенумерации); для дальнейшего это весьма существенно.

По поводу факторизации конечноразностных операторов см. [130].

2.5. Хотя следствие 2.1 оказалось достаточным для выяснения возможности разложения Пойа—Маммана, в других отношениях бывает важно знать знаки $[x;\, 1\dots k]$ и прочих вронскианов, связанных с ИФС. Прежде чем перейти к этому вопросу, напомним два известных факта.

Лемма 2.4 (см., например, [131]). *Справедлива формула*

$$\frac{d}{dt}\frac{[u;\, 1\dots k+1\backslash k]}{[u;\, 1\dots k]} = \frac{[u;\, 1\dots k-1][u;\, 1\dots k+1]}{[u;\, 1\dots k]^2} \tag{2.9}$$

при всех t, где правая часть определена (т. е. где $u_1, \dots, u_{k+1}$ k-кратно дифференцируемы и $[u; 1\dots k](t) \neq 0$).

Лемма 2.5 (М. Фекете [132]). *Если положительны все миноры вида*

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ l & l+1 & \dots & l+k-2 & l+k-1 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n;\ l = 1, 2, \dots, m-k+1)$$

некоторой $n \times m$-матрицы $A\,(n \leqslant m)$, то положительны и все миноры вида

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ i_l & i_2 & \dots & i_{k-1} & i_k \end{pmatrix} \qquad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n).$$

Строки и столбцы можно, конечно, поменять ролями. Доказательство леммы Фекете можно найти также в монографии [93, с. 306–307].

2.6. Следующее предложение послужит весьма полезным инструментом в дальнейших рассмотрениях.

Лемма 2.6. *Пусть функции $u_i(t) \in C_*^{m-2} I$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ $(m \geqslant 2)$ таковы, что*

$$u_1 \prec\!\!\prec u_2 \prec\!\!\prec \dots \prec\!\!\prec u_m (t \uparrow \beta), \tag{2.10}$$

$$[u;\, 1\dots m]\,(t) \text{ знакопостоянна в } I \tag{2.11}$$

и для некоторого r $(1 \leqslant r \leqslant m)$

$$\forall k\ (1 \leqslant k \leqslant m)\ [u; 1\dots k\backslash r](t) \neq 0 \text{ на } I. \tag{2.12}$$

Тогда

$$[u; 1 \dots m](t) \geqslant 0 \text{ на } I, \tag{2.13}$$

$$\forall k \ (1 \leqslant k \leqslant m-1) \ [u; 1 \dots k](t) > 0 \ \text{ на } \ I \tag{2.14}$$

и для любого возрастающего набора индексов $(1 \leqslant) \, i_1 < i_2 < \cdots < i_k \, (\leqslant m)$, *где* $k \leqslant m-1$,

$$[u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}](t) > 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.15}$$

Будем доказывать лемму индукцией по m. Так как при $m = 2$ она тривиальна, считаем ее уже доказанной для систем, содержащих $m-1$ функций.

Отметим вначале, что

$$[u; 1 \dots m] \not\equiv 0 \text{ в любой } U_{-}\beta. \tag{2.16}$$

Действительно, в противном случае оказалось бы $L_r u_r \equiv 0$ вблизи β, где L_r — оператор, отвечающий фундаментальной системе $u_1, \dots, u_{r-1}, \ u_{r+1}, \dots, u_m$. Но вытекающая отсюда линейная зависимость $u_1, \dots, u_m$ вблизи β, очевидно, несовместима с (2.10).

Нашей ближайшей целью является доказательство соотношения:

$$\text{если } r < m, \text{ то } v(t) \overset{Df}{=} \frac{[u; 1 \dots m-1]}{[u; 1 \dots m \backslash r]} \to 0 \qquad (t \uparrow \beta). \tag{2.17}$$

Так как $[u; \, 1 \dots m \backslash r] \neq 0$ в I, то $v(t)$ абсолютно непрерывна в I и в соответствии с (2.9)

$$\dot{v} = -\frac{[u; 1 \dots m-1 \backslash r][u; 1 \dots m]}{[u; 1 \dots m \backslash r]^2} \quad (r < m). \tag{2.18}$$

Ввиду (2.11) и (2.12) правая часть знакопостоянна на I, так что $v(t)$ (нестрого) монотонна в I. Предположим, что (2.17) не выполнено; тогда при $t \uparrow \beta$ $v(t)$ стремится к ненулевому пределу (конечному или бесконечному). Пусть постоянная c совпадает по знаку с числителем $v(t)$ вблизи β и достаточно велика по абсолютной величине; тогда

$$[u; \, 1 \dots m \backslash r] - c[u; \, 1 \dots m-1] < 0 \text{ в некоторой } U_{-}\beta. \tag{2.19}$$

Определим систему функций $\{u_i'\}$ следующим образом:

$$u'_1 = u_1, \dots, u'_{r-1} = u_{r-1}; u'_r = u_{r+1}, \dots, u'_{m-2} = u_{m-1},$$
$$u'_{m-1} = u_m + (-1)^{m-r} c u_r. \tag{2.20}$$

Неравенство (2.19) перепишется теперь в виде

$$[u'; 1 \dots m-1] < 0 \text{ в некоторой } U_{-}\beta. \tag{2.21}$$

Очевидно, $u'_1 \prec\!\!\prec u'_2 \prec\!\!\prec \dots \prec\!\!\prec u'_{m-1} (t \uparrow \beta)$; сопоставляя это с (2.12), (2.21), видим, что система (2.20) удовлетворяет на интервале $I' = U_{-}\beta$ всем условиям леммы (с заменой m и r на $m-1$). Отсюда, согласно предположению индукции, вытекает, что $[u'; 1 \dots m-1] \geqslant 0$ в $U_{-}\beta$. Полученное противоречие с (2.21) доказывает (2.17).

В силу (2.16) и (2.18) $v \not\equiv 0$ в любой $U_{-}\beta$. Учитывая (2.17) и (нестрогую) монотонность v на I, заключаем, что v строго знакопостоянна в I, т. е.

$$[u; 1 \dots m-1] \neq 0 \ \text{ в } \ I. \tag{2.22}$$

Мы доказали (2.22) для случая $r < m$; если же $r = m$, то (2.22), конечно, не нуждается в доказательстве, так как содержится в предпосылке (2.12).

Соотношения (2.12) и (2.22) показывают, что система $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ попадает в сферу действия индуктивного предположения (с тем же r, если $r < m$; при $r = m$ в качестве нового r здесь можно выбрать $m - 1$). Поэтому справедливы неравенства (2.14) (строгое знакопостоянство $[u; 1 \ldots m-1]$ вытекает из (2.22)) и

$$\forall k, l \; (1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m-1) \; [u; k \ldots l] > 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.23}$$

В частности,

$$\forall l \; (2 \leqslant l \leqslant m-1) \; [u; 2 \ldots l] > 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.24}$$

Следующим этапом будет проверка неравенства

$$[u; 2 \ldots m] \neq 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.25}$$

Если $r = 1$, оно не нуждается в доказательстве ввиду (2.12).

Пусть $r > 1$; по той же формуле (2.9)

$$\frac{d}{dt} \frac{[u; 2 \ldots m]}{[u; 1 \ldots m-1]} = \frac{[u; 2 \ldots m-1][u; 1 \ldots m]}{[u; 1 \ldots m-1]^2}. \tag{2.26}$$

Правая часть знакопостоянна вблизи β в силу (2.11), (2.24) и притом, согласно (2.16), не обращается в тождественный нуль ни в какой $U_-\beta$. Отсюда вытекает, что дифференцируемое отношение, будучи в соответствии с (2.22) абсолютно непрерывной в I функцией, (нестрого) монотонно, а следовательно, строго знакопостоянно вблизи β. Итак, (2.25) доказано.

Соотношения (2.24) и (2.25) показывают, что система $\{u_i''\}$, которую определим равенствами $u_i'' = u_{i+1}$ $i = 1, 2, \ldots, m-1$, удовлетворяет условиям леммы (с заменой m и r на $m - 1$) на некотором интервале $I'' = U_-\beta$. Отсюда, в соответствии с предположением индукции и неравенством (2.25),

$$\forall k, l \; (2 \leqslant k \leqslant l \leqslant m) \; [u; k \ldots l] > 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.27}$$

Сопоставление (2.23) и (2.27) дает

$$\forall k, l \; (0 \leqslant l - k \leqslant m-2) \; [u; k \ldots l] > 0 \text{ вблизи } \beta. \tag{2.28}$$

Лемма Фекете, отнесенная к $(m-1) \times m$-матрице $\|u_j^{(i)}\|$ $(i = 0, 1, \ldots, m-2;\ j = 1, 2, \ldots, m)$, показывает, что из (2.28) вытекают неравенства (2.15).

Наши несколько утомительные манипуляции приближаются к концу: осталось доказать лишь (2.13). В случае $r < m$ (2.13) непосредственно усматривается из (2.15), (2.17) и (2.18): из (2.15) следует, что $v > 0$ в I, поэтому $\dot{v} \leqslant 0$ вблизи β в силу (2.17) и монотонности v вблизи β. В случае же $r = m$ заметим следующее обстоятельство: в силу (2.24) найдется такая $U_-\beta$, что условия леммы остаются выполненными для системы $u_1, u_2, \ldots, u_m$, если заменить I на $I' = U_-\beta$ и $r = m$ на $r' = 1$. Поэтому, согласно сказанному выше, (2.13) справедливо вблизи β; но отсюда, учитывая (2.11) и (2.16), заключаем, что оно справедливо и на всем I.

При переформулировке леммы на случай $t \downarrow \alpha$ следует заменить β на α, (2.10) — на условие «$u_1 \ggcurly \ldots \ggcurly u_m (t \downarrow \alpha)$», $[u; 1 \ldots k \backslash r]$ в (2.12) — на $[u; k \ldots m \backslash r]$ и, наконец, (2.14) — на неравенство

$$\forall k \; (2 \leqslant k \leqslant m) \; [u;\, k \ldots m](t) > 0 \text{ на } I.$$

2.7. Следующее предложение частично носит итоговый характер.

Теорема 2.1 (об иерархии). *Пусть $L \in T_0 I$. Тогда уравнение $Lx = 0$ обладает иерархическими фундаментальными системами решений $\{x_i\}$ при $t \uparrow \beta$, т. е. системами решений $\{x_i\}$, удовлетворяющими соотношению (2.1). Каждая ИФС при $t \uparrow \beta$ обладает следующими свойствами:*

а) $[x; 1 \ldots k](t) > 0$ *в* I $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

б) для любого возрастающего набора индексов $(1 \leqslant)\, i_1 < i_2 < \cdots < i_k \,(\leqslant n)$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}](t) > 0 \text{ вблизи } \beta \ (1 \leqslant k \leqslant n);$$

в) если $\{i_s\}$ *и* $\{j_s\}$ $(s = 1, 2, \ldots, k; 1 \leqslant k \leqslant n-1)$ *— два различных возрастающих набора индексов, причем* $i_s \leqslant j_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$, *то*

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}](t) \prec\!\!\prec [x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}](t) \ (t \uparrow \beta). \tag{2.29}$$

Для случая $t \downarrow \alpha$ β заменяется на α, (2.1) — на «$x_1 \succ\!\!\succ \ldots \succ\!\!\succ x_n$ $(t \downarrow \alpha)$» и $[x; 1 \ldots k]$ в а) — на $[x; k \ldots n]$.

Содержание теоремы, за исключением утверждения в), обосновано выше; в частности, для получения б) достаточно сопоставить следствие 2.1 и лемму 2.6 (при $m = r = n$).

Докажем в). Заметим прежде всего, что от $\{i_s\}$ к $\{j_s\}$ можно перейти, увеличивая на каждом шаге лишь один из индексов, причем все промежуточные наборы индексов также будут возрастающими (i_k заменяется на j_k, затем i_{k-1} на j_{k-1} и т. д.). Это позволяет ввиду транзитивности отношения «$\prec\!\!\prec$» ограничиться случаем

$$\exists\, r \ (1 \leqslant r \leqslant k) \left\{ i_r < j_r;\ i_s = j_s \text{ при всех } s \neq r \right\}. \tag{2.30}$$

Теперь появляется возможность воспользоваться эффективным приемом, подобный которому уже применялся при доказательстве леммы 2.6. Именно, так как $i_r < j_r$, то, каково бы ни было число c, система

$$x_1, \ldots, x_{j_r - 1}, x'_{j_r}, x_{j_r + 1}, \ldots, x_n, \text{ где } x'_{j_r} = x_{j_r} - c x_{i_r},$$

является ИФС при $t \uparrow \beta$. Поэтому согласно б)

$$[x_{j_1}, \ldots, x_{j_r - 1}, x'_{j_r}, x_{j_r + 1}, \ldots, x_{j_k}] = [x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}] - c[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] > 0 \text{ вблизи } \beta$$

Поскольку c произвольно велико, это доказывает (2.29).

Теорема 2.1 достаточно полно описывает поведение решений в окрестности неосцилляционного конца. Она показывает, в частности, что «иерархия» распространяется не только на решения, но и на их производные, правда, лишь в специфической форме (2.29), связанной с вронскианами; утверждение «$|x_i^{(k)}| \prec\!\!\prec |x_j^{(k)}|$ при $i < j$ $(t \uparrow \beta \neq \underline{\beta})$» было бы некорректным при $k > 0$ уже по той причине, что, как показывают простые примеры, $x_i^{(k)}(t)$ могут колебаться при $t \uparrow \beta (\neq \underline{\beta})$.

Как уже отмечалось, для существования системы решений $\{x_i\}$, удовлетворяющей условию (2.1), достаточно лишь того, чтобы решения не колебались при $t \uparrow \beta$; в то же время для а), б), в) предположения о неосцилляции — $L \in T_0 I$ для а),

$\underline{\beta} \neq \beta$ для б) и в), являются, конечно, необходимыми. Так, возвращаясь к уравнению третьего порядка, рассмотренному в 1.2, имеем $x_1 \prec\!\!\prec x_2 \prec\!\!\prec x_3$ при $t \to \infty\,(= \underline{\infty})$, причем вронскиан $[x_1, x_2] = t^{-1/2}/2 + \cos t$ колеблется при $t \to \infty$.

Нетрудно видеть, что неравенства типа (2.29) имеют место и в условиях леммы 2.6; доказательство вполне аналогично. Отметим еще, что для теоремы об иерархии был использован лишь частный случай $r = m$ леммы 2.6; при этом условие (2.11) и требование гладкости выполнялись, так сказать, «с запасом». Однако позднее, в § 5, лемма 2.6 понадобится нам в большей общности.

В заключение остановимся на одной переформулировке утверждения б). Говорят (см. [131]), что система функций $u_i(t) \in C_*^{m-1}J$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяет правилу Декарта на J, или, короче, является *декартовой* на J, если для любой нетривиальной линейной комбинации $u = c_1u_1 + \cdots + c_mu_m$ величина φ_uJ не превосходит числа перемен знака в последовательности $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Как показано в [131], для этого необходимо и достаточно, чтобы при любом k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ все вронскианы вида

$$[u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_k}] \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m) \tag{2.31}$$

имели на J один и тот же строгий знак, зависящий лишь от k (в [131] предполагается, что J — интервал, но это несущественно). Если при всех k вронскианы (2.31) положительны на J, естественно называть систему $\{u_i\}$ $(+)$-*декартовой* на J; таким образом, $(+)$-декартовы системы образуют подкласс декартовых. Утверждение б) теоремы 2.1 можно теперь сформулировать так: *любая ИФС при* $t \uparrow \beta (t \downarrow \alpha)$ *является* $(+)$-*декартовой вблизи* $\beta(\alpha)$.

§ 3. Некоторые вопросы распределения нулей

Здесь, опираясь на изложенное в части § 2, мы установим некоторые закономерности распределения нулей решений уравнения $L(x) = 0$ в расширенном промежутке $\bar{I} = [\alpha, \beta]$, который, если $\alpha = -\infty$ или $\beta = \infty$, снабжается топологией расширенной числовой прямой. Обычно не будет предполагаться, что $L \in T_0I$; поэтому рассмотрения настоящего параграфа, по сравнению с предыдущим, носят несколько более «глобальный» характер.

3.1.

Лемма 3.1. *Пусть при* $k \to \infty$ $x_k(t) \to x(t)$ *в* $\mathfrak{M}$ $(x_k, x \in \mathfrak{M}')$, $a_k, b_k \to \tau$ $(\alpha \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant \beta)$.

Если $\tau \in I$ *или* τ — *неосцилляционный конец* I, *то*

$$\varphi_x\tau \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \varphi_{x_k}[a_k, b_k]. \tag{3.1}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\varphi_{x_k}[a_k, b_k] \geqslant m \overset{D_f}{=} \min\left\{n, \varlimsup_{k\to\infty} \varphi_{x_k}[a_k, b_k]\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.2}$$

Мы покажем, что $\varphi_x\tau \geqslant m$; поскольку $x \not\equiv 0$, отсюда будет следовать, что $m < n$, т. е. m совпадает с правой частью (3.1).

В случае $\tau \in I$ это достигается стандартным рассуждением, основанным на теореме Ролля. Именно, в силу (3.2) найдутся точки $\tau_k^i \in [a_k, b_k]$ такие, что

$$\forall i \ (0 \leqslant i \leqslant m - 1) x_k^{(i)}(\tau_k^i) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

(гладкость x_k достаточна для применимости теоремы Ролля, так как $m \leqslant n$). Поскольку $a_k, b_k \to \tau$, то

$$\tau_k^i \to \tau \qquad (i = 0, 1, \dots, m-1) \qquad (k \to \infty). \tag{3.4}$$

Хорошо известно, что сходимость решений в n-мерном пространстве $\mathfrak{M}$ влечет за собой их сходимость в $C^{n-1}J$ для любого отрезка $J \subset I$. Заключая точку τ внутрь такого отрезка J и учитывая равномерную на J сходимость $x_k^{(i)}(t)$ к $x^{(i)}(t)$, переходим в (3.3), (3.4) к пределу: $x(\tau) = \ldots = x^{(m-1)}(\tau) = 0$.

Пусть теперь τ совпадает с одним из неосцилляционных концов I, для определенности, скажем, с β ($\neq \underline{\beta}$). В случае сингулярности β (представляющем, конечно, основной интерес) приведенное рассуждение неприменимо; основным инструментом теперь будет служить теорема 2.1.

Положим $s = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \varphi_{x_k}\beta$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\forall\, k\ \varphi_{x_k}\beta = s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant m-1 \tag{3.5}$$

(случай $s = m$ тривиален ввиду замкнутости соответствующего $(n-m)$-мерного подпространства). Ясно, что $\varphi_x\beta \geqslant s$. Таким образом, если $\{y_i\}$ — ИФС при $t \uparrow \beta$, то

$$x_k = \sum_{i=1}^{n-s} c_{ik} y_i \qquad (k = 1, 2 \ldots), \qquad x = \sum_{i=1}^{n-s} c_i y_i, \tag{3.6}$$

$$c_{ik} \to c_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n-s) \qquad (k \to \infty). \tag{3.7}$$

Требуемое утверждение $\varphi_x\beta \geqslant m$ эквивалентно обращению в нуль коэффициентов $c_{n-m+1}, c_{n-m+2}, \dots, c_{n-s}$; иначе это можно записать в виде

$$r \leqslant n - m, \tag{3.8}$$

где r — наибольший из индексов ненулевых c_i $(i = 1, 2, \dots, n-s)$ $(1 \leqslant r \leqslant n-s)$. Согласно (3.7)

$$c_{rk} \to c_r \neq 0, \quad c_{ik} \to 0, \quad \text{при} \quad i > r \quad (k \to \infty). \tag{3.9}$$

Для произвольного k, учитывая (3.6), находим

$$[x_k, y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_{n-s}] = c_{rk}[y; r, \dots, n-s] + \sum_{i=1}^{r-1} c_{ik}[y_i, y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_{n-s}]. \tag{3.10}$$

По теореме об иерархии

$$[y_i, y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_{n-s}] \prec\!\!\prec [y; r, \dots, n-s] \quad (t \uparrow \beta)$$
$$(i = 1, 2, \dots, r-1).$$

Это вместе с (3.9) позволяет сделать из (3.10) следующий вывод: существует U_β такая, что для всех достаточно больших k

$$c_r[x_k, y_{r+1}, y_{r+2}, \dots, y_{n-s}] > 0 \quad \text{в} \quad U\_\beta \quad (k \geqslant k_0). \tag{3.11}$$

Согласно той же теореме 2.1

$$[y; i \ldots n-s] > 0 \quad \text{вблизи} \quad \beta \quad (i = r+1,\, r+2, \dots, n-s). \tag{3.12}$$

Пусть (t_0, β) — интервал, в котором неравенства (3.11), (3.12) выполняются одновременно. Это означает, что система функций $x_k, y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_{n-s}$ является строго чебышёвской на (t_0, β), поэтому

$$\varphi_{x_k}(t_0, \beta) \leqslant n - s - r \quad (k \geqslant k_0). \tag{3.13}$$

С другой стороны, так как $a_k \to \beta$ $(k \to \infty)$, то $[a_k, b_k] \subset (t_0, \beta]$ при достаточно больших k, откуда с учетом (3.2) и (3.5) следует

$$\varphi_{x_k}(t_0, \beta) \geqslant \varphi_{x_k}[a_k, b_k] - \varphi_{x_k}\beta \geqslant m - s \quad (k \geqslant k_1). \tag{3.14}$$

Сопоставление (3.13) и (3.14) дает (3.8).

Итак, можно сказать, что при приближении к неосцилляционному концу обычные нули переходят в пределе в обобщенные нули соответствующей кратности; введение последних тем самым вполне оправдано.

3.2. Доказанное утверждение нетрудно теперь обобщить следующим образом.

Теорема 3.1 (о неисчезновении нулей). *Пусть при*

$$k \to \infty \ \ x_k(t) \to x(t) \ \ \textit{в} \ \ \mathfrak{M}(x_k, x \in \mathfrak{M}'), \ a_k \to a, \ b_k \to b \quad (\alpha \leqslant a_k \leqslant b_k \leqslant \beta).$$

Если каждая из точек a, b принадлежит I либо является неосцилляционным концом I, то

$$\varphi_x[a, b] \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \varphi_{x_k}[a_k, b_k]. \tag{3.15}$$

Обозначим правую часть (3.15), если она конечна, через m; в противном случае пусть m — произвольно большое натуральное число. Теорема будет доказана, если мы убедимся, что

$$\varphi_x[a, b] \geqslant m; \tag{3.16}$$

в самом деле, это исключает вторую из упомянутых возможностей (так как $\varphi_x[a, b] < < \infty$), поэтому m должно совпадать с правой частью (3.15).

Не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi_{x_k}[a_k, b_k] \geqslant m$ при всех k, и ввиду компактности m-мерного куба, что при $k \to \infty$

$$t^i_{x_k}[a_k, b_k] \to t^i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (a \leqslant t^1 \leqslant t^2 \leqslant \ldots \leqslant t^m \leqslant b).$$

Среди точек t^i могут быть совпадающие; разобьем их на соответствующие группы: $t^1 = t^2 = \ldots = t^{s_1} < t^{s_1+1} = t^{s_1+2} = \ldots = t^{s_2} < \ldots < t^{s_r+1} = t^{s_r+2} = \ldots = t^m$ $(1 \leqslant \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_r < m)$. В силу леммы 3.1

$$\varphi_x t^{s_i} \geqslant s_i - s_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, r+1) \ (s_0 = 0, s_{r+1} = m),$$

что после суммирования по i дает (3.16).

Попутно проверен следующий (впрочем, почти очевидный) факт: *если $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$, то величины $\varphi_x I$ равномерно ограничены по всем $x \in \mathfrak{M}'$.* Действительно, в противном случае нашлись бы $x_k \in \mathfrak{M}'$ $(k = 1, 2, \ldots)$ такие, что $\varphi_{x_k} I \to \infty$ $(k \to \to \infty)$. Так как x_k могут быть нормированы в $\mathfrak{M}$, то ввиду конечномерности $\mathfrak{M}$ можно считать, что $x_k \to x \in \mathfrak{M}'$ при $k \to \infty$; тем самым мы оказались в условиях теоремы 3.1 (с $a_k = \alpha, b_k = \beta$ при всех k), причем правая часть (3.15) бесконечна, что невозможно.

Условие неосцилляционности в формулировке теоремы 3.1, разумеется, не может быть отброшено, так как без него «исчезновение» нулей вполне возможно. Пример:

$$L = \frac{d^4}{dt^4} - 1, \quad I = (-\infty, \infty), \quad x_k = e^{-t} + \frac{1}{k}\sin t \to e^{-t}\ (k \to \infty).$$

3.3. Рассмотрения этого пункта содержательны лишь при $L \notin T_0 I$, что здесь и предполагается. Сейчас мы введем в рассмотрение сопряженные к t справа и слева точки $\bar{t}$, $\underline{t}$. Предпошлем этому соглашение, относящееся к обозначению $T_0 s$ $(= T_0[s,s])$. Поскольку обобщенные кратности, как и обычные, не превосходят $n-1$ (для $x \in \mathfrak{M}'$), то соотношение $L \in T_0\alpha$ $(L \in T_0\beta)$ имеет место, если α (β) является неосцилляционным концом; в противном случае будет удобно считать, что $L \notin T_0\alpha$ $(L \notin T_0\beta)$; это чисто формальное соглашение, поскольку смысл выражений $T_0\alpha$, $T_0\beta$ определен лишь для неосцилляционных случаев.

Точка $\bar{t}(\in \bar{I})$ определяется для любого $t \in \bar{I}$, при котором $L \notin T_0[t,\beta]$ соотношением

$$\bar{t} = \text{infimum}\ \ s \in [t,\beta] \quad \textit{таких, что} \quad L \notin T_0[t,s].$$

Аналогично, для любого $t \in \bar{I}$, при котором $L \notin T_0[\alpha,t]$, полагаем

$$\underline{t} = \text{supremum}\ \ s \in [\alpha,t] \quad \textit{таких, что} \quad L \notin T_0[s,t].$$

Таким образом, в случае $L \in T_0[t,\beta]$ $\bar{t}$ не определена; это же относится и к $\underline{t}$, если $L \in T_0[\alpha,t]$. Тот факт, что $\bar{t}$ определена (не определена), будем записывать в виде $\bar{t} \in \bar{I}$ $(\bar{t} \notin \bar{I})$; аналогичный смысл вкладывается в соотношения $\underline{t} \in \bar{I}$, $\underline{t} \notin \bar{I}$ (точки вне $\bar{I}$ для нас, так сказать, «не существуют»).

Ясно, что введенные ранее записи $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} = \beta$, $\underline{\beta} \neq \beta$ согласуются с данными определениями $\bar{t}$, $\underline{t}$; следует лишь отметить, что указывающие на неосцилляционность записи $\bar{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$ не предполагают, что $\bar{\alpha}$, $\underline{\beta}$ определены, и понимаются, таким образом, лишь как отрицания соотношений $\bar{\alpha} = \alpha$, $\underline{\beta} = \beta$ соответственно.

Покончив с необходимыми формальностями, приступим к изучению свойств $\bar{t}$, $\underline{t}$ как функций t. Начнем с простейшего.

Лемма 3.2. *Если $t \in I$, $\bar{t} \in \bar{I}$, то $t < \bar{t}$; аналогично, если $t \in I$, $\underline{t} \in \bar{I}$, то $\underline{t} < t$.*

Это замечание почти очевидно; поскольку $L \in T_0 t$ для любого $t \in I$, оно вытекает, например, из следующего, более содержательного предложения

Лемма 3.3. *Если $t, \bar{t} \in \bar{I}$, то $L \notin T_0[t,\bar{t}]$; точно так же $L \notin T_0[\underline{t},t]$ для любых $t, \underline{t} \in \bar{I}$.*

Из соображений симметрии достаточно доказать первое из утверждений леммы 3.3. Оно сводится к тавтологии, если $t = \alpha = \bar{\alpha}$ или $t = \beta = \underline{\beta}$ (ввиду соглашения выше), а также при $t < \bar{t} = \beta$ (в силу определения $\bar{t}$); эти тривиальные случаи можно, таким образом, исключить из рассмотрения. Согласно определению $\bar{t}$, найдутся t_k $(k = 1,2,\ldots)$ такие, что $t_k \downarrow \bar{t}$ при $k \to \infty$ и $L \notin T_0[t,t_k]$ $(k = 1,2,\ldots)$. Пусть $x_k \in \mathfrak{N}[t,t_k]$ $(k = 1,2,\ldots)$. Без ограничения общности можно считать последовательность $\{x_k\}$ нормированной в $\mathfrak{M}$ и, ввиду компактности единичной сферы в $\mathfrak{M}$, сходящейся к некоторому $x \in \mathfrak{M}'$. В силу теоремы 3.1 $x \in \mathfrak{N}[t,\bar{t}]$. Лемма доказана.

Теперь легко найти области определения $\overline{t}, \underline{t}$ в «явном» виде:

$$t \in [\alpha, \underline{\beta}] \leftrightarrow \overline{t} \in \overline{I}, \qquad t \in [\overline{\alpha}, \beta] \leftrightarrow \underline{t} \in \overline{I}. \tag{3.17}$$

Первое из этих соотношений немедленно вытекает из $L \notin T_0[\underline{\beta}, \beta]$, $L \in T_0(\underline{\beta}, \beta]$, а второе — из $L \notin T_0[\alpha, \overline{\alpha}]$, $L \in T_0[\alpha, \overline{\alpha})$.

Лемма 3.4. *$\overline{t}, \underline{t}$ как функции t строго возрастают.*

Покажем, что $\overline{t}$ строго возрастает в своей области определения $[\alpha, \underline{\beta}]$ (для $\underline{t}$ рассуждение аналогично). Пусть $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \underline{\beta}$; тогда, очевидно, $\overline{t_1} \leqslant \overline{t_2}$. Менее тривиальное строгое неравенство $\overline{t_1} < \overline{t_2}$ доказывается от противного с помощью леммы 2.3. Предположим, что $\overline{t_1} = \overline{t_2}$; к противоречию ведет следующая цепочка соотношений, основанных на леммах 2.3 и 3.3:

$$L \in T_0[t_1, \overline{t_1}) = T_0(t_1, \overline{t_1}] = T_0(t_1, \overline{t_2}] \subset T_0[t_2, \overline{t_2}] \not\ni L$$

(это рассуждение корректно, очевидно, и при $t_2 = \beta = \underline{\beta}$).

Лемма 3.5. *$\overline{t}$ и $\underline{t}$ как функции t являются обратными: $\overline{a} = b \leftrightarrow a = \underline{b}$ для любых $a, b \in \overline{I}$.*

Проверим, например, импликацию $\overline{a} = b \to a = \underline{b}$. Пусть $\overline{a} = b$; тогда согласно лемме 3.3 $L \notin T_0[a, b]$ и, следовательно, $a \leqslant \underline{b} \in \overline{I}$. Но неравенство $a < \underline{b}$ невозможно, ибо в силу леммы 2.3 оно повлекло бы за собой соотношения $L \notin T_0(a, b] = T_0[a, \overline{a}) \ni L$.

Итак, показано, что «$\underline{\overline{t}} \equiv t$»; эта запись леммы 3.5 является лаконичной, но несколько условной (так как не содержит указаний на допустимый промежуток для t и порядок «сопряжений»).

Леммы 3.4 и 3.5 вместе с (3.17) показывают, что $t \to \overline{t}$ есть взаимно однозначное, монотонное, а следовательно, и непрерывное отображение отрезка $[\alpha, \underline{\beta}]$ на отрезок $[\overline{\alpha}, \beta]$; обратное отображение $t \to \underline{t}$ обладает, конечно, аналогичными свойствами. Итак, установлена следующая

Теорема 3.2. *Отображение $t \to \overline{t}$ есть возрастающий гомеоморфизм $[\alpha, \underline{\beta}]$ на $[\overline{\alpha}, \beta]$, обратный к которому дается отображением $t \to \underline{t}$.*

Отрезки $[\alpha, \underline{\beta}]$, $[\overline{\alpha}, \beta]$ непусты ввиду сделанного выше предположения $L \notin T_0\overline{I}$; если усилить его до $L \notin T_0 I$, то тем самым будет исключена также возможность вырождения каждого из этих отрезков в точку(α и β соответственно).

3.4. Естественным является вопрос об эффективном отыскании $\overline{a}$ или $\underline{a}$ для заданной точки $a \in \overline{I}$, если известны решения уравнения $Lx = 0$. В несингулярном случае это делается с помощью хорошо известного способа, непосредственно вытекающего из результатов работ [38, 39]. Покажем, как следует модифицировать соответствующую процедуру, чтобы распространить ее на расширенный промежуток $\overline{I}$ с, вообще говоря, сингулярными концами.

Итак, пусть известна фундаментальная система решений $z_1, z_2, \ldots, z_n$ уравнения $Lz = 0$. Естественно считать, что над каждой «известной» функцией $u(t)$ мы в состоянии производить, наряду с элементарными, такие операции, как, например: выяснить, существует ли, и если существует, вычислить предел (конечный или бесконечный) $u(t)$ при $t \to s$ ($s \in \overline{I}$); выяснить, строго знакопостоянна ли $u(t)$ на s_1, s_2

$(s_1, s_2 \in \overline{I})$, колеблется ли $u(t)$ при $t \downarrow s_1$ и если ни то, ни другое, — определить $t_u^1(s_1, s_2)$. Покажем, что задача сводится к конечному числу подобных операций. Для определенности опишем схему нахождения $\overline{\alpha}$ (это не ограничивает общности; см. ниже). Алгоритм состоит из нескольких этапов.

1°. Выясняем, существует ли у $Lx = 0$ фундаментальная система решений $\{x_i\}$ такая, что

$$x_1 \ggcurly x_2 \ggcurly \ldots \ggcurly x_n \qquad (t \downarrow \alpha), \tag{3.18}$$

и находим ее, если она существует. Для этой цели, исходя из системы $\{z_i\}$, будем строить систему $\{x_i\}$ с помощью процесса «иерархизации», на котором основывалось доказательство леммы 2.1. Легко видеть, что этот алгоритм состоит из конечного числа выполнимых операций. Возможны два случая:

а) процесс оборвется, не достигнув цели, из-за того, что мы натолкнемся на решение $z \in \mathfrak{M}'$, колеблющееся при $t \downarrow \alpha$, либо на пару решений $z', z'' \in \mathfrak{M}'$, отношение которых не имеет (конечного или бесконечного) предела при $t \downarrow \alpha$. В том и другом случае уравнение $Lx = 0$ обладает колеблющимися при $t \downarrow \alpha$ решениями, поэтому $\overline{\alpha} = \alpha$;

б) построение системы (3.18) будет беспрепятственно доведено до конца; см. 2°.

2°. Образуем из найденных функций x_i вронскианы

$$w_k(t) = [x, k \ldots n](t) \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{3.19}$$

Ясно, что $w_k \not\equiv 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$. Снова имеются две возможности:

а) хотя бы одна из функций $w_2, w_3, \ldots, w_n$ колеблется при $t \downarrow \alpha$; в этом случае опять-таки $\overline{\alpha} = \alpha$;

б) $w_k \neq 0$ вблизи $\alpha \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$; см. 3°.

3°. В случае 2° б) согласно результатам части § 2 $\overline{\alpha} \neq \alpha$ и $w_k > 0$ вблизи α $(k{=}2, 3, \ldots, n)$. Пусть K — совокупность индексов k $(2{\leqslant}k{\leqslant}n)$, для которых $\varphi_{w_k} I \geqslant 1$. Очередное разветвление таково:

а) $K \neq \varnothing$. Тогда

$$\overline{\alpha} = \min_{k \in K} t_{w_k}^1 I; \tag{3.20}$$

б) $K = \varnothing$, т. е. все w_k положительны в I; см. 4°.

4°. Поскольку в случае 3° б), очевидно, $L \in T_0 I$, то осталось лишь выбрать между двумя возможностями: $\overline{\alpha} = \beta$ и $\overline{\alpha} \notin \overline{I}$. С помощью «иерархизации» построим ИФС $\{y_i\}$ при $t \uparrow \beta$; это заведомо осуществимо, так как $\underline{\beta} \neq \beta$. Положим

$$\widetilde{w}_k(t) = [y, k \ldots n](t) \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{3.21}$$

Если хотя бы для одного k $(2 \leqslant k \leqslant n)$

$$w_k \llcurly \widetilde{w}_k \qquad t \uparrow \beta, \tag{3.22}$$

то $\overline{\alpha} = \beta$; в противном случае $\overline{\alpha} \notin \overline{I}$.

В обосновании нуждаются лишь этапы 3° и 4°, особенно последний. Начнем с 3°. Обозначим правую часть (3.20) через τ; так как все w_k положительны в (α,τ), то $L \in T_0(\alpha,\tau)$. Для доказательства равенства $\overline{\alpha}=\tau$ достаточно поэтому убедиться, что $L \notin T_0(\alpha,\tau)$. Пусть i — минимизирующий индекс в (3.20): $\tau = t^1_{w_i}I$. Найдется нетривиальная линейная комбинация $x = c_i x_i + \ldots + c_n x_n$ такая, что $\varphi_x\tau \geqslant n-i+{}$ $+\,1$, поскольку определитель соответствующей однородной системы уравнений для $c_i,\ldots,c_n$ есть $w_i(\tau)=0$. С другой стороны, $\varphi_x\alpha \geqslant i-1$, поэтому $\varphi_x[\alpha,\tau] \geqslant n$ и, следовательно, $L \notin T_0[\alpha,\tau]$.

Переходя к 4°, разложим $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по базису $\{y_j\}$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \qquad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Обозначая через C матрицу $\|c_{ij}\|_1^n$, находим для произвольного k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ по формуле Бине—Коши

$$w_k = \sum C\begin{pmatrix} k & k+1 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{n-k+1}\end{pmatrix}[y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{n-k+1}}],$$

где суммирование производится по всевозможным возрастающим наборам индексов $(1 \leqslant)\, i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k+1}\,(\leqslant n)$. Отсюда, согласно теореме об иерархии,

$$w_k = C\begin{pmatrix} k & k+1 & \ldots & n \\ k & k+1 & \ldots & n\end{pmatrix}\widetilde{w}_k + o(\widetilde{w}_k) \qquad (t \uparrow \beta).$$

Соотношение (3.22) эквивалентно, таким образом, равенству

$$C\begin{pmatrix} k & k+1 & \ldots & n \\ k & k+1 & \ldots & n\end{pmatrix} = 0. \tag{3.23}$$

В свою очередь (3.23) равнозначно существованию линейной комбинации $x = d_k x_k +{}$ $+ \ldots + d_n x_n (\not\equiv 0)$ такой, что $\varphi_x\beta \geqslant n-k+1$ (в левой части (3.23) стоит определитель соответствующей однородной системы уравнений для $d_k,\ldots,d_n$.) Итак, (3.22) эквивалентно следующему утверждению:

$$\exists k, x \ (2 \leqslant k \leqslant n, x \in \mathfrak{M}')\ \ \{\varphi_x\alpha \geqslant k-1, \varphi_x\beta \geqslant n-k+1\}. \tag{3.24}$$

Теперь ясно, что если для некоторого k, $2 \leqslant k \leqslant n$ имеет место (3.22), то $L \notin T_0 I$, т. е. $\overline{\alpha}=\beta$ (напомним, что $L \in T_0 I$). Для завершения обоснования алгоритма осталось доказать обратное: $\overline{\alpha}=\beta$ влечет за собой выполнение (3.22) или, что то же самое, (3.24), для некоторого k $(2 \leqslant k \leqslant n)$. Другими словами, осталось проверить следующее:

$$\overline{\alpha} = \beta \to \exists\, x\ (x \in \mathfrak{M}')\ \varphi_x\alpha + \varphi_x\beta \geqslant n.$$

Эту импликацию пока оставим без доказательства; она является следствием теоремы 3.3, к которой мы вскоре перейдем.

Отыскание $\overline{a}$ для любого $a \in I$ осуществляется по сходной, но более простой схеме. Этапы $1°, 2°$ отпадают за ненадобностью, поскольку заведомо $\overline{a} \neq a$, и система $\{x_i\}$, удовлетворяющая условию (3.18) при $t \downarrow \alpha$, теперь тривиально определяется начальными условиями в точке a. Этапы $3°, 4°$ сохраняются без изменений (разумеется, с заменой α на a). Что касается нахождения $\overline{\beta}$, то оно, в соответствии с определением, сводится к нахождению $\underline{\beta}$: если $\underline{\beta} = \beta$, то и $\overline{\beta} = \beta$; в противном случае $\overline{\beta} \notin \overline{I}$.

Если и α, и β несингулярны, то решение задачи еще более упрощается и сводится, по существу, к формуле (3.20), являющейся в этом случае очевидным следствием работ [38, 39].

Отыскание $\underline{a}(a \in \overline{I})$ проводится аналогично, с очевидной переменой ориентации. Концы α и β меняются ролями; наборы вронскианов (3.19) и (3.21) заменяются наборами $[x; 1 \dots k]$, $[y; 1 \dots k]$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ (при нумерации, принятой для ИФС); наконец, в формуле, аналогичной (3.20), должен, естественно, фигурировать не минимальный в (a, β), а максимальный в (α, a) из нулей соответствующих вронскианов.

Отметим еще следующую подробность: «явная» формула (3.20) не делает непосредственно очевидными непрерывность и возрастание $\overline{t}$ как функции t, установленные выше из общих соображений. В самом деле, если рассматривать левый конец α как переменный, то каждая отдельно взятая величина $t^1_{w_k} I$ может и убывать при возрастании α, и испытывать разрывы по α в своей области определения. Тот факт, что для минимума из $t^1_{w_k} I$ и то и другое исключено, объясняется, конечно, наличием специфической связи между $w_2, w_3, \dots, w_n$.

3.5. Часто бывает важно выделить из множества $\mathfrak{N}\overline{I}$, если оно непусто, решения с «наиболее удобным» расположением нулей; смысл этого выражения колеблется в зависимости от обстоятельств. Так, ввиду устойчивости простых нулей при малых возмущениях в некоторых вопросах могут особый интерес представлять решения, имеющие в I не менее n простых нулей; они всегда существуют, если $L \notin T_0 I$ (см. [27]; близкое утверждение «$L \notin T_0 I \to \exists x \ (x \in \mathfrak{M}') \ \psi_x I \geqslant n$» ранее установили Ф. Хартман [133] и О. Арамэ [134]). Чаще, однако, полезнее не «рассредоточивать», а, наоборот, максимально «сосредоточивать» нули, выделяя решения $x \in \mathfrak{N}\overline{I}$, удовлетворяющие условию $\varphi_x t_1 + \varphi_x t_2 \geqslant n$ для каких-либо $t_1, t_2 \in \overline{I}$; в несингулярном случае наличие подобных решений хорошо известно. Ниже для общего случая будет установлено существование решений, обладающих, наряду с упомянутым, также и некоторыми другими полезными свойствами, в частности, строгим знакопостоянством в интервале (t_1, t_2).

Пусть $L \notin T_0\overline{I}$, $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$. Поставим в соответствие каждому $x \in \mathfrak{N}\overline{I}$ два следующих n-мерных «вектора нулей»:

$$
\begin{aligned}
&N_x = (t^n_x\overline{I}, t^{n-1}_x\overline{I}, \dots, t^1_x\overline{I}),\\
&N^*_x = (t^{m-n+1}_x\overline{I}, t^{m-n+2}_x\overline{I}, \dots, t^m_x\overline{I}), \quad \text{где} \quad m = \varphi_x\overline{I}
\end{aligned}
$$

(координаты N_x, таким образом, не возрастают с номером, а координаты N^*_x не убывают). Введем, далее, для n-мерных векторов лексикографическую упорядоченность, записывая ее, как обычно, с помощью знаков $\prec, \preccurlyeq$.

Рассмотрим теперь две сходные экстремальные задачи: найти в $\mathfrak{N}\overline{I}$ решение, минимизирующее N_x по $x \in \mathfrak{N}\overline{I}$ (его мы будем называть решением с «минимальными нулями»); найти в $\mathfrak{N}\overline{I}$ решение, максимизирующее N^*_x по $x \in \mathfrak{N}\overline{I}$ (решение с «максимальными нулями»). Таким образом, скажем, $x(\in \mathfrak{N}\overline{I})$ есть решение с минимальными нулями, если

$$
N_x \preccurlyeq N_z \quad \text{для всех} \quad z \in \mathfrak{N}\overline{I}. \tag{3.25}
$$

Сразу отметим, что требуемые решения с экстремальными нулями, если они существуют, определены однозначно с точностью до множителя. В самом деле, предположим, например, что условию (3.25), наряду с x, удовлетворяет также некоторое решение $x' \not\equiv cx, N_x = N_{x'}$. Пусть $z(t) = x'(s)x(t) - x(s)x'(t)$, где s — любая точка интервала $(t_x^1\overline{I},\, t_x^n\overline{I})$, отличная от $t_x^i\overline{I}$ $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$. Очевидно, $z \in \mathfrak{N}\overline{I}$ и $N_z \prec N_x$ что противоречит (3.25).

Теорема 3.3 (о решениях с экстремальными нулями). *Если, как предполагалось, $L \notin T_0\overline{I}$, $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$, то в $\mathfrak{N}\overline{I}$ существуют решения $x(t), x^*(t)$ с минимальными и максимальными нулями соответственно, причем*

$$N_x = (\underbrace{\overline{\alpha}, \ldots, \overline{\alpha}}_{k}, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n-k}), \quad N^*_{x^*} = (\underbrace{\underline{\beta}, \ldots, \underline{\beta}}_{k^*}, \underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{n-k^*}),$$

где k, k^* — некоторые числа $(1 \leqslant k, k^* \leqslant n-1)$.

Из соображений симметрии достаточно доказать теорему в части, относящейся к решению с минимальными нулями. Начнем, естественно, с существования x. Соотношения $L \notin T_0\overline{I}$, $\overline{\alpha} \neq \alpha$ означают, что $\alpha < \overline{\alpha} \leqslant \beta$. В силу леммы 3.3 $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}] \neq \varnothing$; с другой стороны, $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}) = \mathfrak{N}(\alpha, \overline{\alpha}] = \varnothing$. Поэтому для любой $z \in \mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ первая координата у $N_z = (\overline{\alpha}, \ldots, \alpha)$ является минимальной из возможных; таким образом, минимизация N_z в $\mathfrak{N}\overline{I}$ сводится к минимизации N_z в $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ или, что то же самое, в пересечении $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ с единичной сферой пространства $\mathfrak{M}$. Дальнейшее рассуждение целиком опирается на теорему 3.1. Она показывает, что $\mathfrak{N}_1$ есть компакт; с другой стороны, из нее легко следует, что $t_z^i[\alpha, \overline{\alpha}] (i = 2, 3, \ldots, n-1)$ полунепрерывны снизу по z в $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$. Поэтому множество $\mathfrak{N}_2$ решений $z \in \mathfrak{N}_1$, на которых достигается $\inf t_z^{n-1}[\alpha, \overline{\alpha}]$ по всем $z \in \mathfrak{N}_1$, есть непустой компакт. Продолжая так и далее, обозначим через $\mathfrak{N}_{i+1} (i = 2, 3, \ldots, n-2)$ множество решений из $\mathfrak{N}_i$, на которых достигается $\inf t_z^{n-i}[\alpha, \overline{\alpha}]$ по всем $z \in \mathfrak{N}_i$; в силу той же теоремы 3.1 все $\mathfrak{N}_i$ являются непустыми компактами. Ясно, что любое $x \in \mathfrak{N}_{n-1}$ есть решение с минимальными нулями (фактически $\mathfrak{N}_{n-1}$ состоит лишь из двух решений, отличающихся знаком).

Итак, выяснено, что x существует и $N_x = (\overline{\alpha}, \ldots, \alpha)$. Теперь нужно показать, что и каждая из остальных $n-2$ координат N_x совпадает либо с $\overline{\alpha}$ либо с α, т. е. что $x(t) \neq 0$ в $(\alpha, \overline{\alpha})$. Предположим противное: пусть

$$N_x = (\underbrace{t_r, \ldots, t_r}_{k_r}, \underbrace{t_{r-1}, \ldots, t_{r-1}}_{k_{r-1}}, \ldots, \underbrace{t_1, \ldots, t_1}_{k_1}),$$

где $r = \psi_x[\alpha, \overline{\alpha}] \geqslant 3$, $t_i = t_i^x[\alpha, \overline{\alpha}]$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Ясно, что $\alpha = t_1 < t_{r-1} < t_r = \overline{\alpha}$, $\varphi_x t_i = k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $\varphi_x\overline{\alpha} \geqslant k_r$, $k_1 + \ldots + k_r = n$. Мы установим сейчас с помощью «возмущения нулей» существование решения $z \in \mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ такого, что $N_z \prec N_x$; это противоречие с (3.25) докажет теорему.

Пусть $y \in \mathfrak{M}'$ — линейно независимое с x решение, удовлетворяющее условиям

$$\varphi_y t_i \geqslant k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r-2), \quad \varphi_y t_i \geqslant k_i - 1 \quad (i = r-1, r). \tag{3.26}$$

Так как каждым условием вида $\varphi_y s \geqslant l$ в $\mathfrak{M}$ выделяется $(n-l)$-мерное подпространство, то совокупность условий (3.26) определяет в $\mathfrak{M}$ подпространство размерности не меньше, чем $n - k_1 - \ldots - k_r + 2 = 2$, так что требуемое $y \not\equiv cx$ заведомо существует. Возможны два случая.

а) $\varphi_y\overline{\alpha} = k_r - 1$. Выберем непересекающиеся Ut_{r-1} и $U\_\overline{\alpha}$ так, чтобы $t_{r-2} \notin Ut_{r-1}$, $y(t) \neq 0$ в $U\_\overline{\alpha}$. Подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.3, определим $z \in \mathfrak{M}'$ формулой

$$z(t) = z(t, s) = x(t) - \frac{x(s)}{y(s)} y(t), \tag{3.27}$$

где

$$\text{точка} \quad s \in U\_\overline{\alpha} \quad \text{достаточно близка к} \quad \overline{\alpha}. \tag{3.28}$$

Посмотрим, что можно сказать о нулях $z(t)$. Во-первых, очевидно, что

$$\varphi_z t_i \geqslant k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r-2), \quad \varphi_z \overline{\alpha} = k_r - 1, \quad z(s) = 0. \tag{3.29}$$

Кроме того,

$$\varphi_z U t_{r-1} \geqslant k_{r-1}. \tag{3.30}$$

Действительно, так как $\varphi_x \overline{\alpha} \geqslant k_r > \varphi_y \overline{\alpha}$, то

$$\frac{x(s)}{y(s)} \to 0 \quad (s \uparrow \overline{\alpha}) \tag{3.31}$$

и (3.30) вытекает из (3.28), (3.31) и леммы 2.2. Соотношения (3.29), (3.30) показывают, что, с одной стороны, $\varphi_z[\alpha, \overline{\alpha}] \geqslant n$, т. е. $z \in \mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$, а с другой —

$$N_z \preccurlyeq (\underbrace{\overline{\alpha}, \ldots, \overline{\alpha}}_{k_r - 1}, s, \ldots) \prec (\underbrace{\overline{\alpha}, \ldots, \overline{\alpha}}_{k_r}, \ldots) = N_x.$$

б) $\varphi_y \overline{\alpha} \geqslant k_r$. В этом более простом случае $z(t)$ можно определить формулой (3.27), выбрав в качестве s любую точку интервала (t_{r-2}, t_{r-1}). Очевидно, $z \in \mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ и

$$N_z \preccurlyeq (\underbrace{\overline{\alpha}, \ldots, \overline{\alpha}}_{k_r}, \underbrace{t_{r-1}, \ldots, t_{r-1}}_{k_{r-1}-1}, s, \ldots) \prec (\underbrace{\overline{\alpha}, \ldots, \overline{\alpha}}_{k_r}, \underbrace{t_{r-1}, \ldots, t_{r-1}}_{k_{r-1}}, \ldots) = N_x.$$

Легко видеть, что в той части теоремы, которая относится к x (x^*), существенно лишь первое (второе) из условий $\overline{\alpha} \neq \alpha$, $\underline{\beta} \neq \beta$.

3.6. Если $\overline{\alpha} = \beta$, то x и x^*, разумеется, могут совпадать. Этот случай заслуживает того, чтобы ему было уделено некоторое внимание. В определенном смысле типичной является следующая ситуация: $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ представляет собой «прямую» в $\mathfrak{M}$, т. е. состоит из решений вида $cy(t)(c \neq 0)$, где y строго знакопостоянна в $(\alpha, \overline{\alpha})$ и $\varphi_y \alpha + \varphi_y \overline{\alpha} = n$. В этом случае, очевидно, $x = x^* = y$, а векторы N_y и N_y^* отличаются лишь противоположным порядком координат. Рассматриваемый вопрос непосредственно связан с описанным выше алгоритмом нахождения $\overline{\alpha}$; именно, нетрудно показать, что «типичная» ситуация обусловлена единственностью критического индекса k (т. е. минимизирующего индекса в (3.20) или, если $\overline{\alpha}$ определяется этапом 4°, индекса, при котором выполняется (3.22)). В случае неединственности k возникают разнообразные «нетипичные», но тем не менее важные в некоторых вопросах ситуации. Вот несколько примеров на эту тему[1].

1°. $L = \dfrac{d^3}{dt^3} + \dfrac{d}{dt}$, $\alpha = 0$, $\beta = \overline{0} = 2\pi$. Здесь $\mathfrak{N}[0, 2\pi]$ — двумерная плоскость, натянутая на решения $y_1 = \sin t$, $y_2 = 1 - \cos t$; $x = x^* = y_2$, $N_x = (2\pi, 0, 0)$, $N_{x^*}^* = (0, 2\pi, 2\pi)$.

2°. $L = \dfrac{d^4}{dt^4} + 4$, $\alpha = 0$, $\beta = \overline{0}$ (≈ 3.93) — наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{th} \beta$. $\mathfrak{N}[0, \beta]$ состоит из двух прямых $y = cy_1$ и $y = cy_2$, где $y_1 = \operatorname{ch} t \sin t - \operatorname{sh} t \cos t$, $y_2(t) = y_1(t - \beta)$, $x = y_1$, $x^* = y_2$, $N_x = (\beta, 0, 0, 0)$, $N_{x^*}^* = (0, \beta, \beta, \beta)$.

[1]Ради удобства мы позволим себе не оговаривать каждый раз, что в $\mathfrak{N}[\alpha, \overline{\alpha}]$ входят лишь нетривиальные решения.

3°. $L = \dfrac{d^3}{dt^3} - \dfrac{6t}{3t^2+1}\dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{6}{3t^2+1}\dfrac{d}{dt}$, $\alpha = -1$, $\beta = \overline{-1} = 1$. Здесь $\mathfrak{N}[-1,1]$ состоит из функций вида $c_1y_1 + c_2y_2$, $\quad c_1c_2 \leqslant 0$ (т. е. представляет собой два «квадранта»), где $y_1 = (t+1)^2(t-1)$, $y_2 = (t+1)(t-1)^2$. Очевидно, $x = y_1$, $x^* = y_2$, $N_x = (1,-1,-1)$, $N^*_{x^*} = (-1,1,1)$ (между прочим, этот пример свидетельствует о некорректности теоремы 3 из [42]).

4°. $L = \dfrac{d^n}{dt^n}$, $\alpha = -\infty$, $\beta = \overline{-\infty} = \infty$. Этот пример показывает, насколько сложным может быть строение $\mathfrak{N}[\alpha,\overline{\alpha}]$. Здесь $\mathfrak{N}[-\infty,\infty]$ содержит все многочлены степени m $(m = 0,1,\ldots,n-2)$, имеющие не менее $2m-n+2$ вещественных корней. Очевидно, $x = x^* = 1$, $N_x = (\infty,-\infty,\ldots,-\infty)$, $N^*_{x^*} = (-\infty,\infty,\ldots,\infty)$.

Последний пример поучителен и в другом отношении: $\varphi_1[-\infty,\infty] = 2n-2$ — максимально возможное значение $\varphi_z[\alpha,\overline{\alpha}]$ $(z \in \mathfrak{M}')$, поскольку $\varphi_z[\alpha,\overline{\alpha}] = \varphi_z[\alpha,\overline{\alpha}) + \varphi_z\overline{\alpha}$ и $L \in T_0[\alpha,\overline{\alpha})$.

§ 4. Критерий неосцилляции

4.1. Настоящий параграф посвящен следующему предложению.

Теорема 4.1. *Пусть* $[a,b) \subset I$. *Для соотношения* $L \in T_0[a,b]$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали функции* $z_i(t) \in C^{n-1}_*[a,b)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$, *удовлетворяющие условиям*

$$\forall k,l\ (1 \leqslant k < l \leqslant n)\ [z;k\ldots n-1 \setminus l](t) > 0 \qquad (a \leqslant t < b), \tag{4.1}$$

$$(-1)^{n-i}Lz_i \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n-1) \qquad (a < t < b). \tag{4.2}$$

Концы a и b можно, разумеется, поменять ролями, заменив всюду $[a,b)$ полуинтервалом $(a,b]$.

Сформулированное утверждение является, очевидно, полуэффективным критерием неосцилляции. При $n = 2$ теорема 4.1 переходит (в случае несингулярности b) в критерий Валле-Пуссена (см. § 1). При $n = 3$ неравенства (4.1) и (4.2) принимают вид

$$z_1 > 0, \quad z_2 > 0, \quad [z_1,z_2] > 0, \quad Lz_1 \geqslant 0, \quad Lz_2 \leqslant 0 \quad (a \leqslant t < b). \tag{4.3}$$

Легко видеть, что эти условия существенно отличаются от условий приведенного в § 1 полуэффективного критерия Азбелева—Кондратьева—Цалюка, хотя и имеется некоторое внешнее сходство. В частности, ограничения на коэффициенты $p_i(t)$ оператора L, генерируемые неравенствами $Lz_1 \geqslant 0, Lz_2 \leqslant 0$, при той или иной конкретизации z_1,z_2, не связаны с гладкостью p_i (которая вообще не предполагается). Далее, в (4.3) отсутствуют краевые условия для z_1,z_2, но имеется связывающее z_1 и z_2 требование $[z_1,z_2] > 0$. Определенное отличие состоит, конечно, и в том, что теорема Азбелева—Кондратьева—Цалюка дает критерий неосцилляции не на отрезке, а на полуинтервале (с несингулярным концом).

Систему функций $z_i \in C^{n-1}_*J$ $\quad (i = 1,2,\ldots,n-1)$ будем называть *согласованной* на промежутке J, если на J положительны все вронскианы, входящие в левую часть (4.1). Содержащее $n(n-1)/2$ неравенств условие (4.1) согласованности $z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}$ на $[a,b)$ может показаться затруднительным для практического применения теоремы 4.1; подчеркнем, однако, что оно не связано с оператором L, поэтому набор достаточно удобных стандартных согласованных систем может быть заготовлен заранее. Мы вернемся к этому вопросу несколько позже, когда будет идти речь о конкретизациях $\{z_i\}$.

Теорема 4.1 доставляет критерий неосцилляции на отрезке, по крайней мере один из концов которого несингулярен. Непосредственно распространить этот результат на отрезок с обоими сингулярными концами не удается, однако из теоремы 4.1 вытекает достаточное условие неосцилляции на интервалах или полуинтервалах, оба конца которых могут быть сингулярными.

Следствие 4.1. *Если существует система $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, согласованная на интервале $(a, b) \subset I$ и удовлетворяющая условию (4.2), то $L \in T_0[a, b)$.*

В самом деле, каково бы ни было $t \in (a, b)$, здесь, очевидно, выполнены условия теоремы 4.1 для отрезка $[t, b]$ и поэтому $L \in T_0[t, b]$. Ввиду произвольности t это означает, что $L \in T_0(a, b) = T_0[a, b) = T_0(a, b]$ (см. лемму 2.3). Как видим, здесь оказывается кстати то обстоятельство, что требование согласованности $\{z_i\}$ на промежутке J не связывает z_i какими-либо краевыми условиями с концами J.

Отметим, что условие неосцилляции, содержащееся в следствии 4.1, не необходимо, хотя и весьма близко к необходимому. Например, $L = \dfrac{d^3}{dt^3} - p\dfrac{d^2}{dt^2}$ $(p = \text{const})$ при любом p принадлежит $T_0(-\infty, \infty)$ (но, разумеется, не $T_0[-\infty, \infty]$); в то же время соответствующая согласованная на $(-\infty, \infty)$ система существует здесь лишь при $p \neq 0$ ($z_1 = 1, z_2 = e^{pt}$ при $p > 0$; $z_1 = e^{pt}, z_2 = 1$ при $p < 0$).

4.2. Переходим к доказательству теоремы 4.1. Начнем с необходимости.

Введенные в § 2 ИФС характеризуются поведением решений вблизи одного из концов промежутка. Можно пойти дальше в этом направлении, выделяя фундаментальные системы с определенным поведением решений вблизи обоих концов. Именно, будем говорить, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют *дважды иерархическую фундаментальную систему (ДИФС) на I,* если они образуют ИФС как при $t \downarrow \alpha$, так и при $t \uparrow \beta$.

Лемма 4.1. *Если $L \in T_0\overline{I}$, то ДИФС на I существует и является $(+)$-декартовой на I системой.*

Убедимся вначале в существовании ДИФС на I. При любом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, условия $\varphi_{x_k}\alpha \geqslant k-1, \varphi_{x_k}\beta \geqslant n-k$ выделяют в $\mathfrak{M}$ подпространство размерности не меньшей, чем $n-(k-1)-(n-k) = 1$; поэтому соответствующее $x_k \in \mathfrak{M}'$ найдется при любом $k (1 \leqslant k \leqslant n)$. При этом имеют место точные равенства

$$\varphi_{x_k}\alpha = k-1, \quad \varphi_{x_k}\beta = n-k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.4}$$

так как $\varphi_{x_k}\overline{I} \leqslant n-1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ согласно предпосылке $L \in T_0\overline{I}$. Отсюда же следует, что $x_1, \ldots, x_n$ не имеют нулей в I, поэтому их можно выбрать положительными в I. Существование ДИФС на I, таким образом, доказано. Отметим также, что каждая из функций, входящих в ДИФС на I, определяется однозначно с точностью до положительного множителя: если бы для некоторого k в $\mathfrak{M}'$ нашлись x_k и $x'_k (\not\equiv cx_k)$, удовлетворяющие условиям (4.4), то, выбирая произвольное $s \in I$ и полагая $x(t) = x_k(s)x'_k(t) - x'_k(s)x_k(t) \in \mathfrak{M}'$, мы получили бы $\varphi_x\overline{I} \geqslant n$, что невозможно.

Покажем теперь, что ДИФС на I является $(+)$-декартовой на I; для этого согласно лемме 2.5 достаточно проверить, что

$$\forall i, j \ (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)[x; i \ldots j] > 0 \quad \text{на} \quad I. \tag{4.5}$$

Предположим, что (4.5) не выполняется. Поскольку вблизи α и β все требуемые неравенства обеспечиваются теоремой 2.1, это значит, что для некоторых i, j $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ и некоторого $s \in I$

$$[x; i \dots j](s) = 0. \tag{4.6}$$

Отсюда вытекает существование нетривиальной линейной комбинации $v = c_i x_i + c_{i+1} x_{i+1} \dots + c_j x_j$ такой, что $\varphi_v s \geqslant j - i + 1$ (в левой части (4.6) стоит определитель соответствующей однородной системы). Так как, кроме того, $\varphi_v \alpha \geqslant i - 1$, $\varphi_v \beta \geqslant n - j$, то $\varphi_v \overline{I} \geqslant n$, что невозможно.

Впервые подобная связь между строго чебышёвскими (или чебышёвскими) и декартовыми системами была обнаружена С. Н. Бернштейном в связи с построением так называемой *базы чебышёвских систем* [43, 44]; лемма 4.1 может рассматриваться как модификация этого построения (наши предположения и методика отличны от применявшихся в [43, 44]).

Вернемся к необходимости в теореме 4.1. Построение ДИФС на (a, b) еще не достаточно для этой цели, так как нужна согласованность не на (a, b), а на $[a, b)$. Заметим, однако, что $L \in T_0[a_1, b]$ для всех a_1, достаточно близких к a; действительно, соотношение $L \in T_0[a, b]$ означает, что $\underline{b} < a$ либо $\underline{b} \notin \overline{I}$, так что остается сослаться на теорему 3.2. Поэтому, если выбрать a_1 из достаточно малой U_a, ДИФС $\{x_i\}$ на (a_1, b) будет согласно лемме 4.1 (+)-декартовой, а следовательно, и согласованной системой на $[a, b)$. В качестве $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, фигурирующих в теореме 4.1, можно выбрать, например, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ соответственно. Между прочим, аналогичные соображения показывают, что *если* $[a, b] \subset I$ *и* $L \in T_0[a, b]$*, то найдется фундаментальная система, являющаяся* (+)*-декартовой на* $[a, b]$.

Итак, необходимость в теореме 4.1 доказана и притом в усиленной форме, поскольку всякая (+)-декартова на J система является согласованной на J, но не обратно (если число функций в системе больше двух). Пример: при любом $c > 2$ система

$$z_1 = t^2 - ct + 1, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = t + 1$$

является согласованной на $[0, 1]$, не будучи (+)-декартовой на $(0, 1)$. Причина, по которой в формулировке теоремы 4.1 сделан упор именно на согласованность, состоит, разумеется, в том, что наиболее «рабочей» является часть теоремы, относящаяся к достаточности, и с этой точки зрения естественно предъявлять к $\{z_i\}$ возможно меньшие требования. Можно ожидать, впрочем, что здесь это не имеет особого значения, так как, по-видимому, все наиболее естественные «пробные» согласованные системы являются одновременно (+)-декартовыми. Отметим, что во избежание излишней громоздкости формулировки мы не пошли по пути минимизации ограничений на $\{z_i\}$ так далеко, как можно было бы. В частности, из доказательства будет видно, что для всех вронскианов, входящих в условие согласованности и имеющих порядок не выше $n - 3$ (таковые имеются лишь при $n \geqslant 4$), требование положительности можно заменить строгим знакопостоянством. Кроме того, можно видоизменить доказательство таким образом, чтобы допустить обращение в нуль при $t = a$ некоторых (но не всех) вронскианов, входящих в условие согласованности; например, при $n = 3$ достаточно, чтобы неравенство $z_1(t) > 0$ в (4.3) выполнялось лишь при $a < t < b$.

4.3. Прежде чем перейти к достаточности, напомним несколько известных фактов. Первые два из них относятся к функции Грина $G(t, s)$ оператора L при интерполяционных краевых условиях

$$\begin{gathered}\varphi_x t_i \geqslant k_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ (k_1 + \ldots + k_m = n, \quad \xi \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leqslant \eta, \quad [\xi, \eta] \subset I.)\end{gathered} \tag{4.7}$$

Лемма 4.2 (см. [27, 101]). *Если $L \in T_0[\xi, \eta]$, то в квадрате $K : \xi \leqslant t, s \leqslant \eta$ справедливо неравенство*

$$G(t, s)(t - t_1)^{k_1}(t - t_2)^{k_2} \ldots (t - t_m)^{k_m} \geqslant 0 \tag{4.8}$$

Приводим для удобства читателя краткое доказательство. Существование $G(t, s)$ очевидно. Покажем, что, каково бы ни было отличное от $t_1, \ldots, t_m$ фиксированное $t_0 \in [\xi, \eta]$, функция $g(s) = G(t_0, s)$ знакопостоянна и отлична от тождественного нуля в $[\xi, \eta]$. Действительно, в противном случае, очевидно, нашлась бы непрерывная $f(s) > 0$ $(\xi \leqslant s \leqslant \eta)$, ортогональная к $g(s)$ на $[\xi, \eta]$; поэтому решение $x(t)$ краевой задачи (4.7) для уравнения $Lx = f$, помимо n нулей, определяемых условиями (4.7), имело бы еще нуль в точке t_0, что противоречит обобщенной теореме Ролля (1.3) для $J = [\xi, \eta]$.

По этой же причине

$$\frac{\partial^{k_i} G(t, s)}{\partial t^{k_i}}\Big|_{t = t_i} \not\equiv 0 \quad (\xi \leqslant s \leqslant \eta) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Из сказанного уже следует, что левая часть (4.8) знакопостоянна в K; неотрицательность ее усматривается хотя бы из того, что при $t, s \in [t_m, \eta]$ $G(t, s)$, очевидно, совпадает с функцией Коши оператора L (предположение $\eta > t_m$ не ограничивает общности).

Формулировка леммы 4.2 допускает уточнения и обобщения в различных направлениях. Можно показать, например, что $G(t, s)$ не имеет нулей в полосах $\{t_i < t < t_{i+1}, t_1 < s < t_m\}$, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$; более содержательные оценки функции Грина, хорошо приспособленные для исследования задач с нелинейностями, указаны Ю. В. Покорным [135]. Отметим также, что *лемма (4.2) допускает распространение на краевые условия с обобщенными кратностями*; подробнее здесь на этом мы не останавливаемся.

Лемма 4.3. *$G(t, s)$, рассматриваемая как функция узлов $t_1, t_2, \ldots, t_m$ (при фиксированных $t, s, m, k_1, \ldots, k_m$), непрерывна в каждой точке $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, где она определена, т. е. где краевая задача (4.7) не вырождена.*

Этот факт достаточно очевиден. Аналогичное утверждение справедливо, разумеется, и для задач с многоточечными краевыми условиями общего вида, что легко усмотреть из какой-либо «явной» формулы для $G(t, s)$ (см., например, глава 2, § 2).

Лемма 4.4. *Пусть $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ образует строго чебышёвскую систему на $[a, c]$, причем $[u; 1 \ldots m](t) > 0$ $(a \leqslant t \leqslant c)$. Тогда для любого $k (1 \leqslant k \leqslant m - 1)$ и любых t_1, t_2 таких, что $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant c$,*

$$v_k(u_1,\ldots,u_m;t_1,t_2) \overset{D_f}{=} \begin{vmatrix} u_1(t_1) & u_2(t_1) & \ldots & u_m(t_1) \\ \dot u_1(t_1) & \dot u_2(t_1) & \ldots & \dot u_m(t_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(k-1)}(t_1) & u_2^{(k-1)}(t_1) & \ldots & u_m^{(k-1)}(t_1) \\ u_1(t_2) & u_2(t_2) & \ldots & u_m(t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(m-k-1)}(t_2) & u_2^{(m-k-1)}(t_2) & \ldots & u_m^{(m-k-1)}(t_2) \end{vmatrix} > 0. \qquad (4.9)$$

Эта лемма является частным случаем теоремы, сформулированной Г. Пойа в [38] (при несколько иных, но эквивалентных предположениях). Так как доказательство в [38] отсутствует, приведем необходимые пояснения. Заметим, во-первых, что рассматриваемый определитель ни при каких $t_1, t_2 (a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant c)$ не обращается в нуль: в противном случае нашлась бы нетривиальная линейная комбинация $u = c_1u_1 + \ldots + c_mu_m$, удовлетворяющая условиям $\varphi_u t_1 \geqslant k$, $\varphi_u t_2 \geqslant m-k$, что невозможно, так как $\{u_i\}$ — строго чебышёвская система. Ввиду непрерывности по t_1, t_2 отсюда вытекает строгое знакопостоянство $v_k(u_1,\ldots,u_m;t_1,t_2)$ в треугольнике $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant c$; достаточно поэтому доказать (4.9) для какой-либо одной точки этого треугольника. Предположим для удобства записи, что $a \leqslant 0 < c$ (этого всегда можно добиться очевидной заменой переменной), и покажем, что

$$v_k(u_1,\ldots,u_m;0,\tau) > 0 \quad \text{при достаточно малом} \quad \tau > 0. \qquad (4.10)$$

Поскольку $u_i \in C^{m-1}[a,c] \quad (i = 1,2,\ldots,m)$, имеем

$$u_i^{(r)}(\tau) = u_i^{(r)}(0) + \frac{\tau}{1!}u_i^{(r+1)}(0) + \ldots + \frac{\tau^{m-r-1}}{(m-r-1)!}u_i^{(m-1)}(0) + o(\tau^{m-r-1}) \quad (\tau \to 0). \qquad (4.11)$$

Соотношения (4.11) показывают, что $v_k(u_1,\ldots,u_m;0,\tau)$ представляет собой произведение двух определителей:

$$v_k(u_1,\ldots,u_m;0,\tau) = d_k(\tau) \cdot [u;1\ldots m](0), \qquad (4.12)$$

где

$$d_k(\tau) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\tau}{1!} & \ldots & \ldots & \frac{\tau^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{\tau^k}{k!} & \ldots & \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{\tau^{m-1}}{(m-1)!} + o(\tau^{m-1}) \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & \frac{\tau^{k-3}}{(k-3)!} & \frac{\tau^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} & \ldots & \frac{\tau^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{\tau^{m-2}}{(m-2)!} + o(\tau^{m-2}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \frac{\tau}{1!} & \frac{\tau^2}{2!} & \ldots & \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{\tau^k}{k!} + o(\tau^k) \end{vmatrix}.$$

Несложный подсчет с применением известной формулы

$$[fv_1, fv_2, \ldots, fv_n] = f^n[v_1, v_2, \ldots, v_n]$$

дает

$$d_k(\tau) = \frac{1!2!\ldots(m-k-1)!}{k!(k+1)!\ldots(m-1)!}\tau^{k(m-k)} + o(\tau^{k(m-k)}) \quad (\tau \to 0).$$

Итак, $d_k(\tau) > 0$ при малых $\tau > 0$; таким образом, (4.10) вытекает из (4.12), поскольку по условию леммы $[u; 1\ldots m](0) > 0$.

4.4. Переходим к доказательству достаточности в теореме 4.1, которое будет проводиться от противного.

Пусть существует система $\{z_i\}$, удовлетворяющая условиям (4.1),(4.2), и в то же время $L \notin T_0[a,b]$, т. е. $\overline{a} \leqslant b$. Возможны два случая: $\overline{a} < b$ и $\overline{a} = b$. Рассмотрим вначале первый из них

$$\overline{a} < b. \tag{4.13}$$

По теореме 3.3 в $\mathfrak{N}[a,\overline{a}]$ существует решение $x(t)$ с минимальными нулями (см. 3.5). Пусть $\varphi_x a = k (1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Так как $x(t)$ строго знакопостоянно в $(a,\overline{a})$ и определено с точностью до постоянного множителя, можно без ограничения общности считать выполненными соотношения

$$x(a) = \dot{x}(a) = \ldots = x^{(k-1)}(a) = 0, \tag{4.14}$$

$$x^{(k)}(a) = 1, \tag{4.15}$$

$$x(t) > 0 \quad (a < t < \overline{a}), \tag{4.16}$$

$$x(\overline{a}) = \dot{x}(\overline{a}) = \ldots = x^{(n-k-1)}(\overline{a}) = 0. \tag{4.17}$$

Минимальность нулей $x(t)$ обеспечивает импликацию

$$\{y \in \mathfrak{M}', \ \ \varphi_y a \geqslant k+1\} \to \varphi_y \overline{a} \leqslant n-k-2. \tag{4.18}$$

Введем теперь наряду с x другое решение, $x_0 \in \mathfrak{M}'$, которое подчиним требованиям

$$x_0(a) = \dot{x}_0(a) = \ldots = x_0^{(k-2)}(a) = 0, \tag{4.19}$$

$$x_0(\overline{a}) = \dot{x}_0(\overline{a}) = \ldots = x_0^{(n-k-2)}(\overline{a}) = 0, \tag{4.20}$$

$$x_0^{(k-1)}(a) = 1 \tag{4.21}$$

(при $k = 1$ условие (4.19), естественно, отбрасывается, а при $k = n-1$ это относится к (4.20)). Покажем, что такое x_0 существует. Действительно, равенства (4.19) и (4.20) определяют в $\mathfrak{M}$ подпространство размерности $\geqslant 2$, поэтому найдется $x_0 \in \mathfrak{M}'$, удовлетворяющее условиям (4.19), (4.20), линейно независимое с x и определенное с точностью до постоянного множителя; последним можно распорядиться так, чтобы удовлетворить условию (4.21), если только $x_0^{(k-1)} \neq 0$. Но равенство $x_0^{(k-1)} = 0$ невозможно, ибо в этом случае решение $y(t) = x_0(t) - x_0^{(k)}(a)x(t)$ ($\not\equiv 0$, так как x и x_0 линейно независимы) удовлетворяло бы условиям $\varphi_y a \geqslant k+1, \varphi_y \overline{a} \geqslant n-k-1$, что противоречит (4.18). Итак, требуемое $x_0(t)$ существует.

Следующим этапом будет доказательство неравенства

$$(-1)^{n-k} x_0^{(n-k-1)}(\overline{a}) \geqslant 0. \tag{4.22}$$

Допустим, что это не так, т. е. $(-1)^{n-k} x_0^{(n-k-1)}(\overline{a}) < 0$. Тогда $x_0(\overline{a} - \varepsilon) > 0$ при малых $\varepsilon > 0$ и, более того, $x_0 \ggg x(t \uparrow \overline{a})$ в силу (4.17). С другой стороны, из (4.14), (4.15), (4.19), (4.21) вытекает, что $x_0 \succ\!\!\succ x$ и при $t \downarrow a$. Таким образом, отношение $\dfrac{x_0(t)}{x(t)}$ стремится к ∞ как при $t \downarrow a$, так и при $t \uparrow \overline{a}$; будучи в соответствии с (4.16) непрерывной функцией в $(a, \overline{a})$, оно достигает минимума в некоторой точке $\tau \in (a, \overline{a})$. Очевидно,

$$[x, x_0](\tau) = 0. \tag{4.23}$$

Положим

$$y(t) = x_0(\tau)x(t) - x(\tau)x_0(t);$$

в силу (4.16) и линейной независимости $x, x_0, y(t) \not\equiv 0$. Согласно (4.23), $\varphi_y\tau \geqslant 2$. Соотношения (4.14), (4.17), (4.19), (4.20) показывают, что $\varphi_y a \geqslant k-1$, $\varphi_y\overline{a} \geqslant n-k-1$; поэтому $y \in \mathfrak{N}[a, \overline{a}]$ и

$$N_y \preccurlyeq (\underbrace{\overline{a}, \ldots, \overline{a}}_{n-k-1}, \tau, \tau, \underbrace{a, \ldots, a}_{k-1}) \prec (\underbrace{\overline{a}, \ldots, \overline{a}}_{n-k}, \underbrace{a, \ldots, a}_{k}) = N_x$$

(по поводу обозначений см. 3.5), что противоречит определению x. Неравенство (4.22) доказано.

До сих пор мы еще не прибегали к услугам системы $\{z_i\}$; теперь сделаем это, введя в рассмотрение функцию

$$z(t) = \begin{vmatrix} z_1(a) & z_2(a) & \ldots & z_{n-1}(a) \\ \dot{z}_1(a) & \dot{z}_2(a) & \ldots & \dot{z}_{n-1}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(k-2)}(a) & z_2^{(k-2)}(a) & \ldots & z_{n-1}^{(k-2)}(a) \\ z_1(\overline{a}) & z_2(\overline{a}) & \ldots & z_{n-1}(\overline{a}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-k-2)}(\overline{a}) & z_2^{(n-k-2)}(\overline{a}) & \ldots & z_{n-1}^{(n-k-2)}(\overline{a}) \\ z_1(t) & z_2(t) & \ldots & z_{n-1}(t) \end{vmatrix}. \tag{4.24}$$

Непосредственно очевидны соотношения

$$z(a) = \dot{z}(a) = \ldots = z^{(k-2)}(a) = 0, \tag{4.25}$$

$$z(\overline{a}) = \dot{z}(\overline{a}) = \ldots = z^{(n-k-2)}(\overline{a}) = 0. \tag{4.26}$$

В силу (4.1) и (4.13)

$$[z; j \ldots n-1](t) > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (a \leqslant t \leqslant \overline{a}),$$

так что система $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ является строго чебышёвской на $[a, \overline{a}]$. Поэтому согласно лемме 4.4, из формулировки которой мы заимствуем обозначения,

$$(-1)^{n-k-1}z^{(k-1)}(a) = \nu_k(z_1, \ldots, z_{n-1}; a, \overline{a}) > 0, \tag{4.27}$$

$$z^{(n-k-1)}(\overline{a}) = \nu_{k-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}; a, \overline{a}) > 0. \tag{4.28}$$

Раскроем определитель (4.24) по последней строке:

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i}\nu_{k-1}(z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_{n-1}; a, \overline{a})z_i(t). \tag{4.29}$$

Учитывая неравенства (4.1), (4.13), имеем при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$,

$$[z; j \dots n-1 \setminus i](t) > 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n-1) \qquad (a \leqslant t \leqslant \overline{a}).$$

Поэтому при каждом i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ система

$$z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{n-1}$$

является строго чебышёвской на $[a, \overline{a}]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям леммы 4.4. Отсюда

$$\forall i \ (1 \leqslant i \leqslant n-1) \nu_{k-1}(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{n-1}; a, \overline{a}) > 0. \tag{4.30}$$

Сопоставление (4.2), (4.29) и (4.30) дает

$$Lz \leqslant 0 \quad (a < t < \overline{a}). \tag{4.31}$$

Введем, наконец, в рассмотрение функцию

$$v(t) = z(t) - z^{(k-1)}(a)x_0(t) - [z^{(k)}(a) - z^{(k-1)}(a)x_0^{(k)}(a)]x(t).$$

Находим:

$$v(a) = \dot{v}(a) = \dots = v^{(k)}(a) = 0, \tag{4.32}$$

$$v(\overline{a}) = \dot{v}(\overline{a}) = \dots = v^{(n-k-2)}(\overline{a}) = 0, \tag{4.33}$$

$$v^{(n-k-1)}(\overline{a}) = z^{(n-k-1)}(\overline{a}) - z^{(k-1)}(a)x_0^{(n-k-1)}(\overline{a}) > 0, \tag{4.34}$$

$$Lv = Lz \leqslant 0 \quad (a < t < \overline{a}). \tag{4.35}$$

Эти соотношения вытекают из предыдущих: (4.32) — из (4.14), (4.15), (4.19), (4.21), (4.25); (4.33) — из (4.17), (4.20), (4.26); (4.34) — из (4.17), (4.22), (4.27), (4.28); (4.35) — из (4.31).

Пусть $G_\tau(t, s)$ — функция Грина оператора L при краевых условиях

$$\varphi_y a \geqslant k+1, \quad \varphi_y \tau \geqslant n-k-1 \tag{4.36}$$

(если $k = n-1$, то $G_\tau(t, s)$ есть не зависящая от τ функция Коши). Так как $L \in T_0[a, \tau]$ при любом $\tau \in (a, \overline{a})$, то в соответствии с леммой 4.2

$$(-1)^{n-k-1} G_\tau(t, s) \geqslant 0 \quad \text{при любом} \quad \tau \in (a, \overline{a}) \quad (a \leqslant t, s \leqslant \tau). \tag{4.37}$$

Согласно (4.18), краевая задача (4.36) является невырожденной и при $\tau = \overline{a}$; поэтому $G_{\overline{a}}(t, s)$ существует и удовлетворяет неравенству

$$(-1)^{n-k-1} G_{\overline{a}}(t, s) \geqslant 0 \quad (a \leqslant t, s \leqslant \overline{a}), \tag{4.38}$$

которое получается из (4.37) предельным переходом при $\tau \uparrow \overline{a}$ в соответствии с леммой 4.3. Функция $v(t)$, согласно (4.32), (4.33), удовлетворяет краевым условиям (4.36) при $\tau = \overline{a}$. Отсюда, учитывая неравенства (4.35) и (4.38), получаем

$$(-1)^{n-k} v(t) = (-1)^{n-k} \int_a^{\overline{a}} G_{\overline{a}}(t, s)(Lv)(s)\, ds \geqslant 0 \quad (a \leqslant t \leqslant \overline{a}). \tag{4.39}$$

Однако, с другой стороны, из (4.33) и (4.34) следует, что

$$(-1)^{n-k} v(\overline{a} - \varepsilon) < 0 \quad \text{при малых} \ \ \varepsilon > 0. \tag{4.40}$$

Противоречие между (4.39) и (4.40) показывает, что случай (4.13) невозможен.

Если $\overline{a} = b$, это доказательство не проходит. Прежде всего, многие из фигурирующих выше соотношений могут вообще потерять смысл, если $\overline{a} = b = \beta$ есть сингулярный конец I; но и при $b \in I$ условия теоремы 4.1 в этом случае уже не обеспечивают положительности связанных с $\{z_i\}$ вронскианов при $t = \overline{a}\,(= b)$, которая существенно использовалась выше. Тем не менее случай $\overline{a} = b$ удается свести к случаю $\overline{a} < b$. Именно, продолжим функции $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ на интервал (α, b) следующим образом:

$$\widetilde{z}_i(t) = \begin{cases} z_i(t) & \text{при} \quad a \leqslant t < b, \\ x_i(t) & \text{при} \quad \alpha < t < a, \end{cases}$$

где $x_i \in \mathfrak{M}'$, $x_i^{(j)}(a) = z_i^{(j)}(a)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, n-1)$. Ясно, что

$$\widetilde{z}_i \in C_*^{n-1}(\alpha, b) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{4.41}$$

$$(-1)^{n-i} L\widetilde{z}_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (\alpha < t < b). \tag{4.42}$$

Если $a_1 < a$ выбрано достаточно близким к a, то в силу (4.1), (4.41) система $\{\widetilde{z}_i\}$ согласована на $[a_1, b)$. Предположение $\overline{a} = b$ влечет за собой, согласно теореме 3.2, неравенство $\overline{a}_1 < b$ и ввиду (4.42) мы оказываемся в условиях уже рассмотренного случая теоремы 4.1 (с заменой a на a_1, и $\{z_i\}$ на $\{\widetilde{z}_i\}$).

4.5. Проиллюстрируем теперь некоторые возможности конкретизации $\{z_i\}$ для получения эффективных признаков неосцилляции. Начнем с рассмотрения на интервале (a, b) системы

$$z_k = (t-a)^k (b-t)^{n-k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (\alpha < a < t < b < \beta), \tag{4.43}$$

которая является $(+)$-декартовой на (a, b). Это можно проверить непосредственными вычислениями; проще, однако, заметить, что ДИФС на (a, b) оператора $\dfrac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}$

$$u_i = (t-a)^{i-1} (b-t)^{n+1-i} \ (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

является $(+)$-декартовой на (a, b) в силу леммы 4.1; то же самое справедливо поэтому и для ее подсистемы (4.43). Итак, согласно следствию 4.1 $L \in T_0[a, b)$, если определенные формулой (4.43) функции $z_1, \ldots, z_{n-1}$ удовлетворяют неравенствам (4.2), которые в данном случае можно переписать в виде

$$\frac{(-1)^{n-i-1}}{n!} \sum_{k=1}^{n} z_i^{(n-k)}(t) p_k(t) \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (a < t < b). \tag{4.44}$$

Сравним полученное условие с признаком неосцилляции, содержащимся в работе [45] Г. А. Бессмертных и автора и имеющим вид (в интересующем нас линейном случае)

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk} (b-a)^k \|p_k\| < 1 \to L \in T_0[a, b], \tag{4.45}$$

где

$$\|f\| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|, \quad \xi_{nk} = \frac{n-k}{k!n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \xi_{nn} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n!n^n}. \tag{4.46}$$

Предложение (4.45) явилось количественным улучшением известной теоремы Валле-Пуссена [40], в формулировке которой фигурировали другие коэффициенты: $1/k!(> \xi_{nk})$ вместо ξ_{nk}. Основным моментом работы [45] была оценка младших производных n-кратно дифференцируемых функций, имеющая в обозначениях (4.46) вид

$$\{x(a) = x(b) = 0, \varphi_x[a,b] \geqslant n\} \to \|x^{n-k}\| \leqslant \xi_{nk}(b-a)^k \|x^{(n)}\| \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \quad (4.47)$$

Здесь постоянные ξ_{nk} неулучшаемы при любых n, k (это, разумеется, не относится к условию (4.45)). Доказательство дискретного аналога оценки (4.47) можно найти в недавней работе А. Л. Тептина [136]. Непосредственная связь между (4.44) и (4.45) характеризуется соотношением

$$\xi_{nk}(b-a)^k = \frac{1}{n!} \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \|z_i^{(n-k)}\| \; \Big(= \frac{1}{n!} \|z_1^{(n-k)}\| \Big), \quad (4.48)$$

свидетельствующим, что совокупность линейных неравенств (4.44) является менее ограничительным условием, нежели (4.45) («зазор» между $T_0[a,b)$ и $T_0[a,b]$ компенсируется уже строгим знаком неравенства (4.45)). Проверка (4.48) несложна и предоставляется читателю; впрочем, для вышесказанного существенно лишь неравенство

$$\xi_{nk}(b-a)^k \geqslant \frac{1}{n!} \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \|z_i^{(n-k)}\|,$$

являющееся очевидным следствием оценки (4.47). Отметив предпочтительность условия (4.44) перед (4.45), следует добавить, однако, что методика работы [45] обладает, сравнительно с теоремой 4.1, определенным «запасом прочности», который позволяет теми же средствами исследовать некоторые нелинейные задачи (именно они фактически и фигурируют в [45]), а также комплекснозначный случай. Справедливость оценки (4.47) для комплекснозначных $x(t)$ легко вытекает из ее справедливости в вещественном случае и из вещественности функции Грина оператора $\dfrac{d^n}{dt^n}$ при любых интерполяционных краевых условиях.

В работе [129] автор получил оценку, родственную (4.47), но основанную на иных предположениях относительно $x(t)$; она также применялась для улучшения теоремы Валле-Пуссена. Дальнейшее развитие такое применение получило в недавней работе Г. С. Зайцевой [96], где установлена теорема валле-пуссеновского типа, усовершенствованная по сравнению с [129] (и независимая по отношению к (4.45)). Как отмечалось в [96], формулировки, данные в этой работе, отличаются от ранее известных валле-пуссеновских признаков неосцилляции тем, что допускают при фиксированной длине промежутка сколь угодно большие значения $\|p_1\|$, если только $\|p_2\|, \ldots, \|p_n\|$ достаточно малы. Мы хотим сейчас отметить в связи с этим, что теорема 4.1 позволяет здесь продвинуться, в определенном смысле, еще дальше и получить *признаки неосцилляции* (правда, не валле-пуссеновского типа), *в которых коэффициент p_1 вообще не участвует*. Для этого достаточно, очевидно, выбрать согласованную систему $\{z_i\}$ из многочленов не выше $(n-2)$-й степени. Множество таких систем непусто; простейшим примером является система

$$z_k = (t - t_0)^{k-1} \; (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

которая, будучи $(+)$-декартовой на (t_0, ∞), доставляет соответствующий признак неосцилляции на полуоси. При фиксации того или иного конкретного промежутка возникает типичная задача о выборе «оптимальной» системы $\{z_i\}$ (из функций определенного семейства), приводящей к минимальным ограничениям. Разумеется, такая постановка задачи далеко не всегда корректна, поскольку жесткость ограничений, вообще говоря, нельзя охарактеризовать одним параметром; но в ряде случаев подобные «оптимальные» пробные системы все же существуют. Пусть, например, $n = 3$, и нас интересует признак неосцилляции на $[t_1, t_2](\subset I)$, не содержащий ограничений относительно $p_1(t)$ (так что z_1 и z_2 должны быть линейными функциями t). Несложные выкладки показывают, что согласованная на (t_1, t_2) система $z_1 = t_2 - t$, $z_2 = t - t_1$ приводит к наименьшим ограничениям

$$p_2(t) + (t - t_i)p_3(t) \leqslant 0 \quad (i = 1, 2) \quad (t_1 < t < t_2). \tag{4.49}$$

Согласно следствию 4.1 (4.49)$\to L \in T_0[t_1, t_2)$; в действительности заключение может быть усилено до $L \in T_0[t_1, t_2]$ в соответствии со сказанным в конце 4.2.

Между прочим, легко показать, что признаки неосцилляции, не содержащие ограничений относительно какого-либо другого коэффициента $p_i(t)(2 \leqslant i \leqslant n)$, принципиально невозможны.

В связи с системами $\{z_i\}$ степенного типа коснемся еще работ В. А. Кондратьева [35, 46], где основательно изучено двучленное уравнение $x^{(n)} + q(t)x = 0$ и, в частности, установлен признак неосцилляции вида

$$\left\{\frac{\mu_n}{t^n} \leqslant q(t) \leqslant \frac{\lambda_n}{t^n} \text{ при } 0 < t < \infty\right\} \to \frac{d^n}{dt^n} + q \in T_0(0, \infty) \tag{4.50}$$

с неулучшаемыми при всех n значениями μ_n, λ_n. Основную роль в доказательстве (4.50) играет установленная в [35] теорема сравнения (1.10); она позволяет сравнить уравнение $x^{(n)} + q(t)x = 0$ с уравнением $x^{(n)} + \dfrac{k}{t^n}x = 0$, после чего точные значения μ_n, λ_n легко определяются:

$$\mu_3 = -\frac{2\sqrt{3}}{9},\ \lambda_3 = \frac{2\sqrt{3}}{9},\ \mu_4 = -\frac{9}{16},\ \lambda_4 = 1 \quad \text{и т. д.}$$

В общем случае значение μ_n есть наибольший из локальных минимумов, а λ_n — наименьший из локальных максимумов функции $f_n(\nu) = -\nu(\nu - 1)\ldots(\nu - n + 1)$. Следствие 4.1 позволяет обобщить этот результат В. А. Кондратьева на уравнения общего вида; для этого следует взять пробную систему

$$z_i = t^{\nu_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{n-1}) \tag{4.51}$$

с подходящими показателями ν_i. Известно (и без труда проверяется), что система (4.51) является $(+)$-декартовой на $(0, \infty)$. Задавшись целью получить ограничения, которые были бы минимальными в частном случае $p_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, легко усмотреть надлежащие значения ν_i непосредственно из графика $f_n(\nu)$. В частности, при $n = 3$ следует взять $\nu_{1,2} = (3 \mp \sqrt{3})/3$, а при $n = 4$ — $\nu_{1,3} = (3 \mp \sqrt{5})/2$, $\nu_2 = 3/2$ (при $n \geqslant 5$ появляется некоторая свобода выбора). Выпишем здесь соответствующие условия неосцилляции на $(0, \infty)$ для $n = 3, 4$. В случае $n = 3$ это условие имеет вид

$$\frac{2\sqrt{3}}{9t^3} - \frac{\sqrt{3} \mp 1}{3t^2}p_1 - \frac{3 \mp \sqrt{3}}{3t}p_2 \pm p_3 \geqslant 0 \quad (0 < t < \infty).$$

Здесь записаны два неравенства, в одном из которых следует брать верхние знаки, а в другом — нижние. При $n = 4$ приходим к следующему условию:

$$\begin{gathered}
-\frac{1}{t^4} + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2t^3} p_1 + \frac{2 \pm \sqrt{5}}{t^2} p_2 + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2t} p_3 + p_4 \leqslant 0, \\
\frac{9}{16t^4} - \frac{3}{8t^3} p_1 + \frac{3}{4t^2} p_2 + \frac{3}{2t} p_3 + p_4 \geqslant 0, \quad (0 < t < \infty).
\end{gathered}$$

В случае $p_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ полученные таким образом признаки неосцилляции переходят в (4.50). Отметим, что методика работы [35] не приспособлена для получения подобных обобщений (предложенная автором [128] более общая редакция теоремы (1.10) также недостаточна для этой цели), тогда как результаты настоящего параграфа приводят к ним самым естественным образом.

Последняя (по месту, но не по значению) конкретизация $\{z_i\}$, на которой мы здесь остановимся, — это набор экспонент:

$$z_k = e^{\nu_k t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \quad (\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{n-1}). \tag{4.52}$$

Общеизвестно, что система (4.52) является $(+)$-декартовой на $(-\infty, \infty)$. Если ввести в рассмотрение «характеристический многочлен» оператора L

$$p(\lambda, t) = \lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(t)\lambda + p_n(t), \tag{4.53}$$

то неравенства (4.2) для системы (4.52) примут вид

$$(-1)^{n-k} p(\nu_k, t) \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4.54}$$

Итак, выполнение (4.54) при всех $t \in I$ влечет за собой $L \in T_0 I$. Неравенства (4.54) можно записать несколько иначе, если связать их с корнями $\lambda_i(t)$ многочлена $p(\lambda, t)$.

Следствие 4.2. *Пусть при всех $t \in I$ корни $\lambda_i(t), \ldots, \lambda_n(t)$ многочлена (4.53) являются вещественными и разделенными в том смысле, что*

$$\lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t) \quad (t \in I), \tag{4.55}$$

где $\nu_i (\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_{n-1})$ — фиксированные постоянные. Тогда $L \in T_0 I$.

Для приложений особый интерес представляет случай $I = (-\infty, \infty)$. Эквивалентность обеих формулировок проверяется без труда. Неравенства (4.55) больше проясняют существо дела, тогда как формулировка в виде (4.54) подчеркивает, что за счет удачного выбора $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ можно избавиться от необходимости решения уравнения $p(\lambda, t) = 0$. Ввиду полугруппового свойства класса $T_0 I$ следствие 4.2 сохраняет силу и при нестрогих неравенствах $\nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1}$.

Итак, возможности, доставляемые теоремой 4.1, довольно велики. В то же время необходимо подчеркнуть, что результаты настоящего параграфа отнюдь не исчерпывают этой проблематики. В частности, теоремы валле-пуссеновского типа, содержащие интегральные ограничения на величины коэффициентов $p_i(t)$ (см., например, [21, 27, 96]) не могут быть непосредственно получены с помощью теоремы 4.1 — по крайней мере, если ограничиться не зависящими от L пробными системами. Получение полуэффективного критерия неосцилляции, позволяющего охватить интегральные признаки, было бы дальнейшим продвижением в этом круге вопросов.

§ 5. Приложение к асимптотическим оценкам решений

Результаты § 4 в сочетании с некоторыми фактами, установленными в § 2, могут применяться для получения оценок роста решений уравнения $Lx = 0$ при $t \uparrow \beta$ (или $t \downarrow \alpha$), где β (или α) — сингулярный конец интервала I. Этим мы и займемся в настоящем параграфе, причем ограничимся случаем $t \uparrow \beta$. Прежде чем перейти к самим оценкам, остановимся еще на одном факте из теории осцилляции.

5.1.

Лемма 5.1. *Отрезок* $[a, b] \subset I$ *является промежутком осцилляции для* L *(т. е.* $\overline{a} \leqslant b$*) в том и только том случае, если существует* $u(t) \in C_*^{n-1}[a, b]$*, удовлетворяющая относительно некоторых точек* $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(2 \leqslant m \leqslant n, a \leqslant t_1 \ldots \leqslant t_m \leqslant b)$ *следующим условиям:*

$$\varphi_u t_i \geqslant k_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{5.1}$$

где $k_i > 0$ *таковы, что* $k_1 + \ldots + k_m = n$;

$$u^{(k_m)}(t_m) \leqslant 0, \quad u(t) \not\equiv 0 \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_m); \tag{5.2}$$

$$Lu \geqslant 0 \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_m). \tag{5.3}$$

Эта лемма, формулировка которой приводилась в [128], представляет собой, очевидно, полуэффективный критерий осцилляции на отрезке (с несингулярными концами). В одну сторону лемма 5.1 тривиальна: если $L \notin T_0[a, b]$, то в качестве $u(t)$ может быть выбрана любая функция из $\mathfrak{N}[a, b]$, взятая с подходящим знаком. Обратную импликацию «существование $u(t) \to$ осцилляция» докажем от противного. Пусть $L \in T_0[a, b]$, несмотря на наличие $u(t)$, удовлетворяющей условиям (5.1)—(5.3) для некоторых точек $t_1, \ldots, t_m$ отрезка $[a, b]$. Имеются два случая: $u^{(k_m)}(t_m) < 0$ и $u^{(k_m)}(t_m) = 0$; покажем, что каждый из них невозможен. Чтобы исключить первый, заметим, что в этом случае

$$(-1)^{k_m} u(t_m - \varepsilon) < 0 \quad \text{при малых } \varepsilon > 0. \tag{5.4}$$

Пусть $Lu = f(t)$ и $G(t, s)$ есть функция Грина оператора L при интерполяционных краевых условиях (5.1); тогда

$$u(t) = \int_{t_1}^{t_m} G(t, s) f(s) ds \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_m). \tag{5.5}$$

Так как $f \geqslant 0$ в $[t_1, t_m]$ и $(-1)^{k_m} G(t_m - \varepsilon, s) \geqslant 0$ при малых $\varepsilon > 0$ согласно предположению $L \in T_0[a, b]$ и лемме 4.2, то из (5.5) получаем $(-1)^{k_m} u(t_m - 0) \geqslant 0$, что противоречит (5.4). Переходим к случаю $u^{(k_m)}(t_m) = 0$. Пусть $\widetilde{\psi_v} J$ обозначает число компонент связности в множестве нулей функции $v(t) \in CJ$ на промежутке $J (0 \leqslant \widetilde{\psi_v} J \leqslant \infty)$. Непосредственно очевидна следующая модификация теоремы Ролля:

$$\{v \in C^{k-2} J, \ \varphi_v J \geqslant k \geqslant 3, \ \widetilde{\psi_v} J \geqslant 2\} \to \{\varphi_{\dot{v}} J \geqslant k - 1, \ \widetilde{\psi_{\dot{v}}} J \geqslant 2\}. \tag{5.6}$$

Из предположения $L \in T_0[a, b]$ вытекает, что $L \in T_0(a_1, b_1)$ для некоторого интервала $(a_1, b_1) \supset [a, b]$; поэтому L допускает на (a_1, b_1) разложение (1.2). Рассмотрим функции

$$v_k = h_k \frac{d}{dt} \ldots h_1 \frac{d}{dt} h_0 u \quad (k = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

В силу соотношений $u^{(k_m)}(t_m) = 0$ и (5.1), $\varphi_{v_0}[t_1, t_m] = \varphi_u[t_1, t_m] \geqslant n+1$; очевидно также, что $\widetilde{\psi}_{v_0}[t_1, t_m] \geqslant 2$. Исходя отсюда и применяя (5.6) последовательно к функциям $v_0(t), v_1(t), \ldots$, находим

$$\varphi_{v_k}[t_1, t_m] \geqslant n+1-k, \quad \widetilde{\psi}_{v_k}[t_1, t_m] \geqslant 2 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{5.7}$$

(множители $h_i(t)$, будучи гладкими и строго знакопостоянными в $[a, b]$ функциями, не влияют на подсчет величин типа φ и $\widetilde{\psi}$). С другой стороны, из условия $Lu = h_n \dot{v}_{n-1} \geqslant 0$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_m)$ вытекает нестрогая монотонность $v_{n-1}(t)$ на $[t_1, t_m]$, которая в свою очередь влечет за собой неравенство $\widetilde{\psi}_{v_{n-1}}[t_1, t_m] \leqslant 1$, противоречащее (5.7) при $k = n-1$.

Отметим, что лемму 5.1 можно было доказать несколько иначе, установив неравенство

$$\left.\frac{\partial^{k_m} G(t,s)}{\partial t^{k_m}}\right|_{t=t_m} > 0 \quad (t_1 < s < t_m),$$

после чего дело сводится к k_m-кратному дифференцированию равенства (5.5). Это потребовало бы сходных, но несколько более пространных, в связи с разрывностью $\dfrac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}$, рассуждений.

Следствие 5.1. *Пусть $\underline{\beta} \neq \beta$. Если функция $u \in C_*^{n-1} U\_\beta$ такова, что $u(t) \not\equiv 0$ вблизи β и Lu знакопостоянна вблизи β, то $u(t) \neq 0$ вблизи β.*

В самом деле, предположим, что это не так и $u(t)$ колеблется при $t \uparrow \beta$. Не ограничивая общности, можно считать, что $Lu \geqslant 0$ вблизи β (иначе заменим u на $-u$). Ясно, что в любой U_β найдутся точки $t_1, t_2, \ldots, t_m$, для которых выполняются условия (5.1) и (5.2). Поэтому, согласно лемме 5.1, любая U_β есть промежуток осцилляции для L, т. е. $\underline{\beta} \neq \beta$, что противоречит условию.

Теперь достаточно прибегнуть к тому элементарному рассуждению, с которого начиналось доказательство леммы 2.1, чтобы установить

Следствие 5.2. *В условиях следствия 5.1 любое отношение вида $\dfrac{u(t)}{x(t)}$, где $x \in \mathfrak{M}'$, имеет (конечный или бесконечный) предел при $t \uparrow \beta$.*

5.2. Переходим к основной цели настоящего параграфа.

Теорема 5.1. *Пусть функции $z_i(t) \in C_*^{n-1} U\_\beta$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям:*

$$[z; 1 \ldots k](t) \neq 0 \quad \textit{вблизи} \quad \beta \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1); \tag{5.8}$$

$$z_0 \lll z_1 \lll \ldots \lll z_n \quad (t \uparrow \beta); \tag{5.9}$$

$$(-1)^{n-k} L z_k \geqslant 0 \quad \textit{вблизи} \quad \beta \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{5.10}$$

Тогда $\underline{\beta} \neq \beta$ и для всякой ИФС при $t \uparrow \beta \{x_i\}$ уравнения $Lx = 0$ справедливы оценки

$$c_i z_{i-1}(t) \leqslant x_i(t) \leqslant d_i z_i(t) \quad \textit{вблизи} \quad \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.11}$$

где c_i, d_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторые положительные постоянные.

Соотношение $\underline{\beta} \neq \beta$ немедленно следует из леммы 2.6, согласно которой система $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ является $(+)$-декартовой вблизи β, и из следствия 4.1. При доказательстве оценок (5.11) мы также будем опираться на лемму 2.6, возможность применения которой подготовлена следствием 5.2.

Итак, пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$– некоторая ИФС при $t \uparrow \beta$. Перепишем (5.10) в виде

$$(-1)^{n-k}[x_1, x_2, \ldots, x_n, z_k] \geqslant 0 \quad \text{вблизи} \quad \beta \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{5.12}$$

а (5.11) — в виде двух семейств оценок

$$x_i = O(z_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (t \uparrow \beta), \tag{5.13}$$

$$z_{i-1} = O(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (t \uparrow \beta). \tag{5.14}$$

Ниже постоянная оговорка «$t \uparrow \beta$» при асимптотических соотношениях для простоты опускается. Начнем с оценки

$$x_1 = O(z_1). \tag{5.15}$$

Чтобы убедиться в ее справедливости, предположим, что (5.15) не имеет места; согласно следствию 5.2, единственной альтернативой является соотношение

$$z_1 \lll x_1. \tag{5.16}$$

Но в этом случае, как показывают теорема об иерархии и неравенство (5.12) при $k = 1$, система функций z_1, x_1, $x_2, \ldots$, x_n в некоторой U_β удовлетворяет условиям леммы 2.6 (при $m = n + 1$, $r = 1$) и поэтому

$$[z_1, x_1, x_2, \ldots, x_n] \geqslant 0 \quad \text{вблизи} \quad \beta. \tag{5.17}$$

Сопоставляя (5.12) и (5.17), заключаем, что вблизи β левая часть (5.17) тождественно равна нулю, т. е. z_1 удовлетворяет уравнению $Lz_1 = 0$, что явно несовместимо с (5.16).

Установим теперь следующую импликацию:

$$x_i = O(z_i) \to x_{i+1} = O(z_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{5.18}$$

Опять-таки предположим противное: пусть при некотором i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ $x_i = O(z_i)$, $x_{i+1} \neq O(z_{i+1})$. Последнее соотношение, согласно следствию 5.2, означает, что $x_{i+1} \ggg z_{i+1}$; так как, с другой стороны, $z_{i+1} \ggg z_i$, то

$$x_i \lll z_{i+1} \lll x_{i+1}. \tag{5.19}$$

Теорема 2.1 и соотношения (5.12), (5.19) показывают, что система функций x_1, $x_2, \ldots$, x_i, z_{i+1}, $x_{i+1}, \ldots$, x_n в некоторой U_β удовлетворяет условиям леммы 2.6 $(m = n + 1, r = i + 1)$, откуда

$$[x_1, \ldots, x_i, z_{i+1}, x_{i+1}, \ldots, x_n] \geqslant 0 \quad \text{вблизи} \quad \beta.$$

Сопоставляя это с неравенством (5.12) при $k = i + 1$, заключаем, что вблизи β z_{i+1} является решением уравнения $Lx = 0$; тем самым получено противоречие с (5.19). Доказанная импликация (5.18) в сочетании с (5.15), очевидно, обеспечивает справедливость оценок (5.13).

Соотношения (5.14) доказываются с помощью аналогичного рассуждения, только осуществляемого в противоположном направлении — от больших индексов к меньшим. Исходной теперь является оценка

$$z_{n-1} = O(x_n) \tag{5.20}$$

после чего (5.14) устанавливается с помощью импликации

$$z_i = O(x_{i+1}) \to z_{i-1} = O(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{5.21}$$

Соотношения (5.20) и (5.21) докажем от противного по уже знакомой схеме. Если (5.20) не выполняется, т. е. $z_{n-1} \ggg x_n$, то система функций $x_1, x_2, \ldots, x_n, z_{n-1}$ удовлетворяет вблизи β всем условиям леммы 2.6 (при $m = r = n+1$), так что ее вронскиан вблизи β неотрицателен и, следовательно, тождественно равен нулю в силу (5.12). С другой стороны, z_{n-1} не может быть в U_β решением уравнения $Lx = 0$, так как $z_{n-1} \ggg x_n$. Заметим, что (5.20) можно доказать и иначе, с помощью теоремы сравнения Чаплыгина. Далее, предполагая, что (5.21) не имеет места, и учитывая (5.9), получаем для некоторого $i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$

$$x_i \lll z_{i-1} \lll x_{i+1}. \tag{5.22}$$

Применение леммы 2.6 (при $m = n+1, r = i+1$) к системе $x_1, x_2, \ldots, x_i,\ z_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ дает $[x_1, \ldots, x_i,\ z_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n] \geqslant 0$ вблизи β. Ввиду (5.12) отсюда следует, что $Lz_{i-1} = 0$ в некоторой U_β, но это невозможно из-за (5.22).

Отметим, что оценки $x_n = O(z_n)$, $z_0 = O(x_1)$, будучи заключительными в процессе доказательства (5.13) и (5.14) соответственно, не использовались для получения остальных оценок; проверка соотношения $\underline{\beta} \neq \beta$ также не требует привлечения функций z_0, z_n. Поэтому, если любую из этих функций или обе сразу изъять из формулировки теоремы 5.1, те из оценок (5.11), в которых не фигурируют изъятые функции, останутся в силе.

5.3. В заключение остановимся на одном частном случае теоремы 5.1, представляющем, пожалуй, наибольший интерес для приложений:

$$\beta = \infty,\ z_i = e^{\nu_i t} \quad (i = 0, 1, \ldots, n)\ (\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n).$$

Как и в формулировке следствия 4.2, здесь условие (5.10) может быть заменено адекватной характеристикой поведения корней уравнения

$$\lambda^n + p_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(t)\lambda + p_n(t) = 0. \tag{5.23}$$

Следствие 5.3. *Пусть при всех достаточно больших t корни $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ уравнения (5.23) вещественны и удовлетворяют неравенствам*

$$\nu_0 \leqslant \lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \ldots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t) \leqslant \nu_n, \tag{5.24}$$

где ν_i — некоторые постоянные ($\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n$). Тогда для ИФС при $t \uparrow \beta$ уравнения $Lx = 0$ имеют место оценки

$$c_i e^{\nu_{i-1} t} \leqslant x_i(t) \leqslant d_i e^{\nu_i t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (t \geqslant t_0), \tag{5.25}$$

где c_i, d_i — некоторые положительные постоянные.

Это предложение отчасти сходно с так называемыми теоремами о «замораживании» (см. [34, 47]), которые также позволяют оценивать рост решений (часто в форме неравенств для показателей Ляпунова) уравнения $Lx = 0$ или, в более общем случае, системы уравнений $\dot{X} = A(t)X$, исходя из равномерных по t в некоторой U_∞ ограничений на коэффициенты. Вот типичная форма теоремы о замораживании (для уравнения $Lx = 0$): если при всех

$$i(1 \leqslant i \leqslant n) \quad \operatorname{Re}\lambda_i(t) \leqslant \nu, \quad |p_i(t)| \leqslant p, \quad |p_i(t_1) - p_i(t_2)| \leqslant k|t_1 - t_2|,$$

то для любого $x \in \mathfrak{M}'$ справедлива оценка

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)|}{t} \leqslant \nu + f_n(p,k). \tag{5.26}$$

Вид функции $f_n(p,k)$ варьируется у различных авторов, но, как правило, $f_n(p,0) \equiv 0$, $f_n(p,k) > 0$ при $k > 0$. Эта функция представляет собой, так сказать, «надбавку на переменность коэффициентов».

Метод замораживания имеет значительно более широкую область применимости, нежели следствие 5.3 (если ограничиться уравнениями с коэффициентами, удовлетворяющими условию Липшица). С другой стороны, традиционная методика замораживания, по-видимому, не позволяет из (5.24) извлечь оценки (5.25) или хотя бы оценку сверху для показателей Ляпунова

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)|}{t} \leqslant \nu_n \quad (x \in \mathfrak{M}'), \tag{5.27}$$

которая, в отличие от (5.26), не содержит никаких «надбавок». Между прочим, как заметил недавно Ю. С. Колесов, для линейных систем общего вида оценка (5.27) вообще не вытекает из (5.24). Напомним также, что следствие 5.3 получено без каких-либо предположений о гладкости или непрерывности коэффициентов. То обстоятельство, что метод замораживания обеспечивает оценку (5.26) не только для x, но одновременно и для $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\ldots$, $x^{(n-1)}$, не играет здесь особой роли, поскольку и (5.27) сохраняет силу при замене x на $x^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что из (5.24) вытекает ограниченность в U_∞ коэффициентов p_1, p_2,…, p_n и воспользоваться следующим результатом.

Теорема 5.2 (Теорема Эсклангона). *Если коэффициенты оператора L ограничены в U_∞ и некоторое $x \in \mathfrak{M}$ имеет вид $x = O(e^{\nu t})$ при $t \to \infty$, то*

$$x^{(k)} = O(e^{\nu t}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad (t \to \infty). \tag{5.28}$$

Сам Эсклангон рассматривал в [137] случай $\nu = 0$, к которому, однако, беспрепятственно сводится случай произвольного ν. Действительно, уравнение $Lx = 0$ после подстановки $x = e^{\nu t}y$ и умножения на $e^{-\nu t}$ перейдет в уравнение $L_1 y = 0$; легко видеть, что поскольку коэффициенты оператора L ограничены при $t \geqslant t_0$, это же верно и для оператора L_1. Так как $y = O(1)$ при $t \to \infty$, то согласно [137]

$$y^{(k)} = e^{-\nu t} \sum_{m=0}^{k} C_k^m (-\nu)^m x^{(k-m)} = O(1) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\ (t \to \infty).$$

Отсюда легко получаем (5.28) с помощью линейного комбинирования, поскольку соответствующая треугольная матрица, очевидно, не вырождена.

Теорема Эсклангона вместе с (5.25) показывает, что *в условиях следствия 5.3 при любом i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i^{(k)}(t) = O(e^{\nu_i t})$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ $(t \to \infty)$.*

Дополнение. Об одной работе Ф. Хартмана

Как уже говорилось, работа [36], положенная в основу настоящей главы, имеет ряд точек соприкосновения с результатами, анонсированными в заметке Ф. Хартмана [48]. В связи с этим представляется целесообразным провести обстоятельное сопоставление результатов, анонсированных в [48], с теми, которые были доказаны в [36] (и изложены выше). Наряду с хартмановскими, будем использовать и некоторые из обозначений, принятых в настоящей главе.

Ф. Хартман рассматривает оператор

$$P = P_n(D) = a_0(t)D^n + a_1(t)D^{n-1} + \cdots + a_n(t) \quad \bigl(D = \frac{d}{dt}\bigr) \tag{6.1}$$

с коэффициентами $a_i(t)$, вещественными и непрерывными в промежутке I (не обязательно открытом), причем $a_0(t) > 0$ в I.

По сравнению с рассматриваемым выше оператором L имеются, таким образом, два отличия:

1) присутствует коэффициент $a_0(t)$ (у нас $a_0(t) \equiv 1$);

2) коэффициенты непрерывны, а не локально суммируемы.

Обстоятельство 1) не имеет никакого значения, поскольку все формулировки, содержащиеся в [48], инвариантны относительно умножения $P_n(D)$ на положительную непрерывную функцию. Различие в общности 2) не столь фиктивно. Мы не склонны придавать ему особое значение; вместе с тем, поскольку непрерывность коэффициентов систематически оговаривается во всех формулировках [48], не исключено, что она является существенной для методики Хартмана (далекой от нашей, судя по имеющимся в [48] указаниям). Переход от непрерывных коэффициентов к суммируемым может быть сделан с помощью дополнительных соображений о «грубости» тех или иных свойств оператора; в частности, для критерия неосцилляции на отрезке с несингулярными концами такое соображение доставляется леммой 3.3 главы 2.

По Ф. Хартману, функции $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ $(\in C^n I)$ образуют $w_n(I)$-систему, если $[u_1, \ldots, u_{i_k}](t) > 0$ в I при $k = 1, \ldots, n-1$, и $W_n(I)$-систему, если $[u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}](t) > 0$ в I при любых $(1 \leqslant) i_1 < \cdots < i_k (\leqslant n-1)$. Таким образом, $W_n(I)$-системы — это (+)-декартовы на I системы в нашей терминологии. В [48] формулируется следующий полуэффективный критерий неосцилляции.

Теорема 1.1. *Пусть I — конечный отрезок. Для соотношения $P \in T_0 I$:*

(i) *достаточно, чтобы существовала $W_n(I)$-система $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ такая, что в I*

$$(-1)^{n-k} P u_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{6.2}$$

(ii) *необходимо, чтобы существовала $W_n(I)$-система из решений уравнения*

$$Px = 0 \quad (t \in I). \tag{6.3}$$

Сходство между этим результатом и нашей теоремой 4.1 очевидно. Остановимся подробнее на различиях.

В части, относящейся к достаточности, имеются несколько моментов, делающих формулировку теоремы 4.1 более полной.

1°. Согласованность системы является менее ограничительным требованием, нежели (+)-декартовость (соответствующий пример приводился в § 4, п. 2). Но и согласованность не использовалась полностью при доказательстве, которое, как уже говорилось, сохраняет силу, если вместо положительности всех вронскианов порядка $< n-2$ потребовать лишь, чтобы они были отличны от нуля.

2°. В теореме 4.1 положительность вронскианов требуется не на всем отрезке $[a, b]$, а лишь на полуинтервале $[a, b)$. Само по себе это различие выглядит незначительным, однако благодаря ему возможен следующий пункт, который представляется основным.

3°. Теорема 4.1 дает критерий неосцилляции на отрезке, один из концов которого может быть сингулярным (в частности, не исключается случай $b = \infty$), тогда как результат Хартмана относится к отрезку с обоими несингулярными концами.

Здесь уместно отметить, что понятие обобщенного нуля, которому выше уделялось много внимания, в [48] отсутствует. Поэтому тот материал настоящей главы, который в основном посвящен этому понятию, не соприкасается с [48] (имеется лишь одно исключение, о котором будет сказано ниже).

Мы должны еще вернуться к критерию неосцилляции по поводу части, относящейся к необходимости. Для случая, когда I — отрезок с несингулярными концами, выше было показано (см. § 4, п. 2), что соотношение $L \in T_0 I$ влечет за собой существование (+)-декартовой фундаментальной системы решений, т. е., в терминологии [48], существование не только $W_n(I)$, но и $W_{n+1}(I)$-системы из решений (6.3).

Таким образом, установленный в § 4 критерий неосцилляции является более полным, чем аналогичный критерий, анонсированный в [48], и перекрывает последний (помимо допустимости разрывных коэффициентов) в нескольких отношениях.

Далее в [48] формулируется

Предложение 1.1. *Пусть I — интервал или полуинтервал, I^0 — внутренность I. Соотношение $P \in T_0 I$ необходимо и достаточно для того, чтобы существовала $w_n(I^0)$-система из решений* (6.3).

Если I — интервал, то достаточность здесь перекрывается утверждением (ii) формулируемой далее теоремы 2.1, совпадающим с утверждением a) нашей теоремы 2.1; необходимость же не является новой и, как было сказано в § 2, п. 4, обнаружена еще Пойа. Переход к полуинтервалу может быть осуществлен с помощью нашей леммы 2.3. Подчеркнем, что сама она отнюдь не вытекает из предложения 1.1 работы [48]: наиболее интересный случай леммы 2.3, когда включенный конец полуинтервала сингулярен, очевидно, исключается условиями Хартмана.

Затем в [48] приводится следствие 1.1, совпадающее с нашим следствием 4.2. Далее Хартман вводит понятие главных решений $\xi_i(t)$, которые сходны с нашими ИФС. Эти решения и их свойства описывает

Теорема 2.1. *Пусть $I = (\alpha, \beta)$, $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$. Тогда существуют решения* (6.3) $\xi_1(t), \ldots, \xi_{n-1}(t)$, *обладающие следующими свойствами.*

(i) $\xi_1 > 0$ *в I и единственно с точностью до постоянного положительного множителя; для $k = 2, \ldots, n-1$ $\xi_k > 0$ при t близких к β, и единственно с точностью до положительного множителя и слагаемого в виде линейной комбинации $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$.*

(ii) $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ *образуют $w_n(I)$-систему.*

(*iii*) *Для* $j = 1, \dots, n-2$ $\xi_j = o(\xi_{j+1})$ *при* $t \to \beta$. *Если* $x(t)$ *— решение* (6.3), *линейно независимое с* $\xi_1, \dots, \xi_k$, *то* $\xi_k = o(x)$ *при* $t \to \beta$.

(*iv*) *Если* $\alpha < \gamma < \beta$, $I_\gamma = (\gamma, \beta)$ *и* $u_1, \dots, u_{n-1}$ *образуют либо* $w_n(I_\gamma)$*-систему из решений* (6.3), *либо* $W_n(I_\gamma)$*-систему, удовлетворяющую условию* (6.2), *то в* $I_\gamma \dot{\xi}_1 \xi^{-1} < \dot{u}_1 u_1^{-1}$ *и* $[\xi_1, u_1, \dots, u_k] \geqslant 0$ *при* $k = 1, 2, \dots n-1$. *В частности,* $\dot{\xi}_1(t)\xi_1^{-1}(t) = \inf[\dot{x}_1(t)x_1^{-1}(t)]$, *где* infimum *берется по всем решениям* (6.3) *таким, что существует* $w_n(I_\gamma)$*-система* $x_1, \dots, x_{n-1}$ *из решений* (6.3).

(*v*) *Если* $x(t) = x(t, \gamma)$ *— решение* (6.3) *такое, что*

$$x(\gamma) = \dots = x^{(n-2)}(\gamma) = 0, \quad (-1)^{n-1} x^{(n-1)}(\gamma) > 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} [x^{(i)}(t_0)]^2 = 1,$$

где t_0, *не зависит от* γ, *то* $\xi_1(t) = C^n(I)$ *— предел* $x(t, \gamma)$ $(\gamma \to \beta)$.

Очевидно, пункты (i), (ii), (iii) аналогичны той части нашей теоремы 2.1, которая относится к существованию ИФС и к свойству а). Утверждения, б) и в) у Хартмана отсутствуют. С другой стороны, утверждение (v) не имеет аналога в нашей работе. Пункт (v) соответствует, очевидно, весьма частному случаю нашей теоремы 3.1. Вместе с тем утверждение (v) может рассматриваться как шаг в направлении теории обобщенных нулей. (Под сходимостью в $C^n(I)$ подразумевается, видимо, сходимость в $C^n(J)$ для любого отрезка $J \subset I$; равномерная сходимость $x^{(i)}$ на I, вообще говоря, здесь не имеет места.)

Далее в [48] формулируется

Теорема 2.2. *Пусть существует* $W_n(I)$*-система* $u_1, \dots, u_{n-1}$, *удовлетворяющая условию* (6.2). *Тогда уравнение* (6.3) *обладает положительными, линейно независимыми решениями* $x_1, \dots, x_n$ *такими, что*

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1} \leqslant \frac{\dot{u}_1}{u_1} \leqslant \frac{\dot{x}_2}{x_2} \leqslant \dots \leqslant \frac{\dot{u}_{n-1}}{u_{n-1}} \leqslant \frac{\dot{x}_n}{x_n}$$

в I. *Если, кроме того, существует* $u_0(t)$ *(и/или* $u_n(t)$*) из* $C^n(I)$ *такая, что* $(-1)^n P u_0 \geqslant 0$ *(и/или* $(P u_n \geqslant 0)$ *и, при* $k = 1, 2, \dots n-1$, $u_0 > 0$, $[u; 0 \dots k] \geqslant 0$ *(и/или* $u_n > 0$, $[u; k \dots n] \geqslant 0$*), то* x_1 *(и/или* x_n*) может быть выбрано так, чтобы*

$$\frac{\dot{u}_0}{u_0} \leqslant \frac{\dot{x}_1}{x_1} \leqslant \frac{\dot{u}_1}{u_1} \quad \Big(\text{и/или } \frac{\dot{u}_{n-1}}{u_{n-1}} \leqslant \frac{\dot{x}_n}{x_n} \leqslant \frac{\dot{u}_n}{u_n}\Big).$$

Это предложение по своему характеру близко к нашей теореме 5.1. Одно из различий состоит в том, что Хартман оценивает не сами решения, а их логарифмические производные. Такой уточненный вариант оценок нетрудно при желании получить и на нашем пути с помощью небольшой модификации доказательства теоремы 5.1; следует учесть, что неравенство $\dfrac{\dot{v}_1}{v_1} \leqslant \dfrac{\dot{v}_2}{v_2}$ эквивалентно при положительных $v_i(t)$ неравенству $[v_1, v_2] \geqslant 0$, и воспользоваться леммой 2.6. Более существенное различие обусловлено тем, что оценки теоремы 2.2 из [48] относятся по всему интервалу I, у нас же они носят асимптотический характер и относятся лишь к некоторой левой полуокрестности точки β; в то же время различны и требования, накладываемые нами на z_i и Хартманом на u_i. У нас, в отличие от [48], имеется естественное условие (5.9); зато число априорных «вронскианных» неравенств, содержащихся в (5.8), намного меньше, чем в требовании, чтобы z_i образовали $W_n(U_-\beta)$-систему.

Итак, по сравнению с нашей теоремой 5.1, теорема 2.2 из [48] содержит, приблизительно говоря, более сильное утверждение при более сильных предположениях. На самом деле, однако, утверждение этой теоремы является «слишком сильным» и не сбалансировано с предпосылками. Приведем простые контрпримеры. Пусть $n = 2$ $I = (-\infty, \infty)$, $P = D^2$. Функция $u_1(t) \equiv 1$ образует $W_2(I)$-систему, удовлетворяющую условию (6.2), т. к. $u_1 > 0$, $\ddot{u}_1 \leqslant 0$; в то же время уравнение $\ddot{x} = 0$, вопреки теореме 2.2, не имеет двух линейно независимых и положительных в I решений. Другой подобный пример: $I = (0, \pi)$, $P = D^2 + 1$, $u_1 = \sin t$[1].

Последним из предложений, формулируемых в [48], является следствие 2.1, родственное нашему следствию 5.3. Мы его не приводим, т. к. оно опровергается аналогичными примерами. Как указывается в [48], подробные доказательства анонсированных результатов будут даны в другой работе. Эта работа позволит сравнить оба подхода — Ф. Хартмана и наш — более основательно.

[1]Тот факт, что столь тонкий знаток вопроса, как Ф. Хартман, не заметил таких простых контрпримеров, связан, возможно, с поспешностью публикации.

4. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ В НЕКОЛЕБАТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

§ 1. Классификация неколебательных случаев для знакопостоянной $q(t)$ (формулировки и обсуждение)

1.1. В настоящей работе исследуются вопросы неколебательного поведения решений уравнения

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (-\infty < a \leqslant t < b \leqslant \infty) \tag{1.1}$$

при $t \to b$. Коэффициенты $p(t)$, $q(t)$ предполагаются вещественными (если не оговорено противное); кроме того, на протяжении большей части работы $q(t)$ будет предполагаться знакопостоянной. Для простоты можно считать $p(t)$, $q(t)$ кусочно-непрерывными в полуинтервале $[a, b)$; в действительности существенно лишь, чтобы они были локально суммируемы на $[a, b)$. Как обычно, при этом предполагается, что соотношение (1.1) выполняется почти при всех t из $[a, b)$ и $\dot{x}(t)$ абсолютно непрерывна. Мы будем несколько пренебрегать этой малосущественной и стандартной стороной дела, употребляя, например, выражения «$q(t) \geqslant 0$» вместо «$q(t) \geqslant 0$ почти всюду», опуская требования абсолютной непрерывности первых производных и т. п. Поскольку изучаться будет лишь поведение решений при $t \to b$, очевидно, что такие требования, как, скажем, знакопостоянство $q(t)$, должны выполняться лишь в некоторой левой полуокрестности точки b; подобные оговорки также обычно будут опускаться.

Говорят, что для уравнения (1.1) имеет место *неколебательность на* $[a, b)$, если нетривиальные решения уравнения (1.1) имеют конечное число нулей на $[a, b)$ (это, в частности, заведомо имеет место, если $q(t) \leqslant 0$); противоположный случай, естественно, называется колебательным. Что касается проверки колебательности или неколебательности заданного уравнения, то по этому поводу можно заметить следующее. Известно весьма большое количество признаков колебательности и неколебательности, образующих в совокупности самостоятельный раздел качественной теории (см. [1, 40, 70, 125, 138–142]). Те из них, которые являются необходимыми и достаточными, формулируются в терминах существования функций, удовлетворяющих определенным условиям (т. е. в терминологии главы 3, являются полуэффективными); та или иная конкретизация этих функций приводит к эффективным достаточным, но уже не необходимым признакам. По всей вероятности, эффективное необходимое и достаточное условие колебательности вообще не может быть указано, даже для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ на $[0, \infty)$ с $q(t)$, положительной и аналитической в $[0, \infty)$. Под «эффективным условием» мы понимаем алгоритм, требующий конечного числа таких «простых» операций над коэффициентами, как элементарные операции, квадратуры, сравнение функций и т. п. Было бы интересно изучить этот вопрос в той или иной точной постановке.

Вместе с тем следует отметить, что большинство практически встречающихся уравнений с неотрицательной $q(t)$ попадает в сферу действия какого-либо из употребительных эффективных признаков, так что проверка на колебательность конкретных уравнений со знакопостоянной $q(t)$ обычно не вызывает трудностей.

В настоящей работе мы часто будем соприкасаться с неколебательностью; некоторые из установленных ниже фактов сами могут трактоваться как признаки колебательности или неколебательности, в других случаях неколебательность выступает как предпосылка (для проверки которой, в соответствии со сказанным, могут привлекаться результаты, изложенные в работах [1, 40, 51, 70, 125, 139–142]).

Ниже для случая знакопостоянной $q(t)$ будет получена полная классификация возможных типов неколебательных фундаментальных систем решений (1.1), учитывающая следующие свойства решений при $t \to b$: стремление к нулю, к бесконечности, к ненулевому пределу, монотонное возрастание или убывание вблизи точки b (при сделанных предположениях, как будет видно из дальнейшего, каждое решение монотонно вблизи b). Для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ при $b = \infty$ такую классификацию дали Э. Хилле [1] (частично) и, в полном виде, И. М. Соболь [51, 138]; в этом случае имеются два типа неколебательных фундаментальных систем при $q(t) \geqslant 0$ и два типа — при $q(t) \leqslant 0$; определяющую роль при этом играет сходимость или расходимость $\int^{\infty} tq(t)\,dt$. В общем случае многообразие возможных типов заметно возрастает, так как добавляется ряд существенно новых асимптотик; в частности, появляются случаи, соответствующие устойчивости и асимптотической устойчивости тривиального решения, тогда как при $p(t) \equiv 0$, $b = \infty$ в неколебательном случае всегда есть неограниченные решения и, следовательно, имеет место неустойчивость.

В этом параграфе формулируются и обсуждаются «классификационные» утверждения, сосредоточенные, главным образом, в теореме 1.1. В § 2 устанавливаются теоремы о возмущении (представляющие и самостоятельный интерес), с помощью которых доказываются утверждения из § 1. В § 3 рассматриваются некоторые дополнения и приложения полученных результатов: в частности, исследуется влияние изменения «коэффициента трения» $p(t)$ на колебательность решений. Большая часть результатов настоящей работы была ранее кратко изложена в [53, 70, 143].

1.2. В качестве фундаментальной системы $x_1(t)$, $x_2(t)$ в дальнейшем выбирается пара линейно независимых решений уравнения (1.1), положительных вблизи точки b, причем в качестве $x_2(t)$ выбирается *минимальное решение,* т. е. единственное с точностью до постоянного множителя решение, удовлетворяющее условию (точка c выбирается правее нулей $x_2(t)$)

$$\int_c^b \exp\Bigl(-\int^t p(s)\,ds\Bigr)x_2^{-2}(t)\,dt = \infty.$$

Существование такого решения в неколебательном случае вытекает из известных формул, связывающих линейно независимые решения (1.1); те же формулы показывают, что

$$\frac{x_2(t)}{x_1(t)} \downarrow 0 \quad (t \to b)$$

для любого положительного решения $x_1(t)$ ($\not\equiv kx_2(t)$), чем и объясняется название «минимальное решение» (по поводу минимальных решений для случая $b = \infty$ см., например, [51, 144]). Особые свойства минимального решения делают весьма целесообразным включение его в фундаментальную систему, поскольку такие системы наиболее рельефно характеризуют поведение решений при $t \to b$. (В терминологии третьей главы, $x_1(t)$, $x_2(t)$ образуют ИФС при $t \uparrow b$; нумерация, таким образом, здесь не совпадает с применявшейся в третьей главе.)

Выбор $x_1(t)$, в отличие от $x_2(t)$, не является однозначным с точностью до множителя. В соответствии с этим встречающееся ниже обозначение $x_1 \uparrow\downarrow 1$ означает, что среди неминимальных решений есть и монотонно возрастающие, и монотонно убывающие к единице (а следовательно, и к любой ненулевой постоянной). Соответственно, запись $x_1 \uparrow 1$ означает, что любое положительное неминимальное решение возрастает к конечному пределу; аналогичный смысл имеют записи $x_1 \downarrow 1$, $x_1 \uparrow \infty$, $x_1 \downarrow 0$. Все утверждения, относящиеся к монотонности, выполняются, разумеется, лишь для t, достаточно близких к b; монотонность можно всюду понимать в строгом смысле, если $q(t) \not\equiv 0$ вблизи b.

Определяющую роль для поведения решений уравнения (1.1) при $t \to b$ играет сходимость или расходимость следующих интегралов:

$$\mathfrak{J}_1(p) = \int^{b} \exp\left(-\int^{t} p(\tau)\, d\tau \right) dt, \quad \mathfrak{J}_2(p,q) = \int^{b} q(t) \exp\left(\int^{t} p(\tau)\, d\tau \right) dt,$$

$$\mathfrak{J}_3(p,q) = \int^{b} q(t)\, dt \int_{t}^{b} \exp\left(\int_{s}^{t} p(\tau)\, d\tau \right) ds, \quad \mathfrak{J}_4(p,q) = \int^{b} q(t)\, dt \int^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} p(\tau)\, d\tau \right) ds.$$

Интеграл $\mathfrak{J}_3$ рассматривается лишь при $\mathfrak{J}_1 < \infty$, а $\mathfrak{J}_4$ — лишь при $\mathfrak{J}_1 = \infty$. Непроставленные пределы интегрирования выбираются в $[a,b)$ произвольным образом, так как их выбор не влияет на сходимость.

1.3. Переходим теперь непосредственно к классификации.

Теорема 1.1 (см. [143]). *Неколебательное поведение при $t \to b$ решений уравнения* (1.1) *со знакопостоянной $q(t)$ характеризуется таблицей 1.*

Нетрудно видеть, что таблица исчерпывает все возможные случаи (ясно, что $|\mathfrak{J}_3| < \infty$ в случае 1 и $|\mathfrak{J}_2| = \infty$ в случае 3). В случаях 3A и 5A, отмеченных звездочкой, неколебательность решений является необходимым требованием; в остальных случаях она является следствием других условий и поэтому может специально не оговариваться.

Поскольку поведение решений в случаях 3B и 5B аналогично, имеем 5 различных типов неколебательного поведения решений при $q(t) \geqslant 0$ и 4 различных типа при $q(t) \leqslant 0$; в целом же при знакопостоянной $q(t)$ оказывается 8 различных типов неколебательного поведения решений (так как случаи 1A, 1B аналогичны). Этот подсчет, разумеется, связан с теми перечисленными выше характеристиками поведения решений, которые были положены в основу классификации. Если, например, игнорировать различия, связанные с возрастанием или убыванием, то цифры 5, 4, 8, как легко проверить, сократятся соответственно до 4, 3, 5; если же, наоборот, дополнительно учитывать такие факторы, как скорость убывания и роста решений, количество различных случаев станет, очевидно, бесконечным.

Вместо $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_4$ можно было бы использовать встречающиеся в [52, 53, 70, 145], интегралы

$$\mathfrak{J}_3^*(p,q) = \int^{b} dt \int^{t} q(s) \exp\left(\int_{t}^{s} p(\tau)\, d\tau \right) ds,$$

$$\mathfrak{J}_4^*(p,q) = \int^{b} dt \int_{t}^{b} q(s) \exp\left(\int_{t}^{s} p(\tau)\, d\tau \right) ds,$$

Таблица 1

	$\mathfrak{J}_1$	$\lvert\mathfrak{J}_2\rvert$	$\lvert\mathfrak{J}_3\rvert$	$\lvert\mathfrak{J}_4\rvert$	A $q(t) \geqslant 0$	B $q(t) \leqslant 0$
1	$<\infty$	$<\infty$			$x_1 \uparrow\downarrow 1, \quad x_2 \downarrow 0$	
2	$<\infty$	∞	$<\infty$		$x_1 \downarrow 1, \ \ x_2 \downarrow 0$	$x_1 \uparrow 1, \ \ x_2 \downarrow 0$
3	$<\infty$		∞		* $x_1 \downarrow 0, \ x_2 \downarrow 0$	$x_1 \uparrow \infty, \ x_2 \downarrow 0$
4	∞			$<\infty$	$x_1 \uparrow \infty, \ x_2 \uparrow 1$	$x_1 \uparrow \infty, \ x_2 \downarrow 1$
5	∞			∞	* $x_1 \uparrow \infty, \ x_2 \uparrow \infty$	$x_1 \uparrow \infty, \ x_2 \downarrow 0$

Учитывая знакопостоянство $q(t)$, можно убедиться элементарными средствами (см. § 2) в том, что при $\mathfrak{J}_1 < \infty$ сходимость $\mathfrak{J}_3$ эквивалентна сходимости $\mathfrak{J}_3^*$, а при $\mathfrak{J}_1 = \infty$ сходимость $\mathfrak{J}_4$ эквивалентна сходимости $\mathfrak{J}_2$ и $\mathfrak{J}_4^*$. Если составить таблицу не для $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_4$, а для $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3^*$, $\mathfrak{J}_4^*$ то строки 1—4 останутся без изменений, а 5-я строка (для случая $q(t) \geqslant 0$) распадется на две, и конец таблицы будет выглядеть следующим образом:

Таблица 2

	$\mathfrak{J}_1$	$\lvert\mathfrak{J}_2\rvert$	$\lvert\mathfrak{J}_3^*\rvert$	$\lvert\mathfrak{J}_4^*\rvert$	A $q(t) \geqslant 0$	B $q(t) \leqslant 0$
...	...		...	...	......	......
5	∞	$<\infty$		∞	* $x_1 \uparrow \infty, \ \ x_2 \uparrow \infty$	$x_1 \uparrow \infty, \ x_2 \downarrow 0$
6	∞	∞			—	$x_1 \uparrow \infty, \ x_2 \downarrow 0$

Случай 6A для неколебательного уравнения невозможен: соотношения $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2 = \infty$ влекут за собой колебательность решений (это верно и для знакопеременной $q(t)$). Таким образом, в этом варианте таблица за счет небольшого усложнения дает некоторую дополнительную информацию. В целом же, использование $\mathfrak{J}_3$, $\mathfrak{J}_4$ или $\mathfrak{J}_3^*$, $\mathfrak{J}_4^*$ приводит (в случае знакопостоянной $q(t)$) к сходным формулировкам; мы подробно остановились на этом параллелизме главным образом для удобства при сопоставлении результатов различных работ.

Что касается скорости роста или убывания решений, то в случаях 1, 2, 4, когда одно из решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ стремится к ненулевой постоянной, асимптотический вид второго легко определяется из формул

$$x_1(t) = c_1 x_2(t) \int^t \exp\left(-\int^s p(\tau)\, d\tau \right) x_2^{-2}(s)\, ds + c_2 x_2(t) \ (c_1 > 0),$$

$$x_2(t) = c x_1(t) \int_t^b \exp\left(-\int^s p(\tau)\, d\tau \right) x_1^{-2}(s)\, ds \ (c > 0).$$

Для случаев 3, 5 могут быть использованы оценки, приводимые в § 3 (теорема 3.1).

1.4. Общая систематизация неколебательных случаев до работы [143], по-видимому, не проводилась; однако ряд отдельных результатов, относящихся к тем или иным случаям, был получен ранее различными авторами. Так, важный случай $p(t) \equiv 0$, $b = \infty$, как уже отмечалось, изучен в работах Э. Хилле [1] и И. М. Соболя [51, 138]; этот случай покрывается строками 4, 5 таблицы 1[1]. Результаты работ [1, 51, 138] будут использоваться нами ниже при общих рассмотрениях. Ряд частных результатов для $b = \infty$, относящихся к различению случаев 1—2, с одной стороны, и случая 3 — с другой, приводился в работах З. Опяля [52], автора [53] и Н. Георгиу [145]. В частности, З. Опяль, накладывая на коэффициенты ограничения $p(t) \geqslant l > 0$, $0 < m \leqslant q(t) \leqslant l^2/4$ (эти требования, как легко видеть, обеспечивают конечность $\mathfrak{J}_1(p)$ и неколебательность), показал, что решения уравнения (1.1) монотонно стремятся к нулю или к различным конечным пределам в зависимости от расходимости или сходимости $\mathfrak{J}_3^*(p, 1)$. В работах [53, 145] константные ограничения на коэффициенты были заменены более общими, чем в [52], интегральными условиями $\mathfrak{J}_1(p) < \infty$, $|\mathfrak{J}_3^*(p, q)| < \infty$, $\mathfrak{J}_3^*(p, q) = \infty$; отметим, что формулировки работы [145] содержат ряд лишних требований. Специфика случая 1А (в отличие от 2А) использовалась в [70], где, в частности, изучалось, как влияет изменение $p(t)$ на колебательность; в этом вопросе основное значение имеет наличие возрастающих или убывающих положительных решений (см. § 3).

Как нам кажется, вышеприведенные таблицы вносят в эти вопросы полную ясность. Идентичность формулировок для случаев $b = \infty$ и $b < \infty$ (последний случай, по-видимому, ранее мало исследовался) свидетельствует о естественности применяемых интегральных условий.

1.5. Утверждения, относящиеся к случаям 3А, 5А, в приложениях естественно сочетать с какими-либо признаками неколебательности (исключая, разумеется, такие признаки, как $q(t) \leqslant 0$ или $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_3 < \infty$ или $\mathfrak{J}_1 = \infty$, $\mathfrak{J}_4 < \infty$). Возможны, однако, и другие схемы применения, не связанные с привлечением условий неколебательности. Примером такого рода может служить теорема 7 из [53]: *если $p(t) \geqslant l > 0$, $0 \leqslant q(t) \leqslant$ $\leqslant 3{,}045l^2$ и $\mathfrak{J}_3^*(p, q) = \infty$ (здесь $b = \infty$), то все решения* (1.1) *вместе со своими первыми производными стремятся к нулю при $t \to \infty$*, т. е. тривиальное решение (1.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Асимптотическая устойчивость в колебательном случае обеспечивается здесь количественным значением верхней границы для $q(t)$, а неколебательный случай «обслуживается» условием $\mathfrak{J}_3^* = \infty$: так как $b = \infty$ и $p(t) \geqslant l > 0$, то $\mathfrak{J}_1(p) < \infty$, так что при неколебательности здесь имеет место случай 3А. Вообще говоря, в случае 3А нельзя гарантировать, что $\dot{x}_1(t) \to 0$, $\dot{x}_2(t) \to 0$ при $t \to b = \infty$, но это становится справедливым, если дополнительно предположить, что $p(t)$ ограничена сверху или что $p(t)$ ограничена снизу, а $q(t)$ — сверху (как в нашем случае); по этому поводу см. теорему 2.3 в § 2. Отметим, что условие $\mathfrak{J}_3^* = \infty$ (эквивалентное, разумеется, условию $\mathfrak{J}_3 = \infty$) в формулировке приведенной теоремы носит необходимый характер, так как при $\mathfrak{J}_3^* < \infty$ имел бы место один из случаев 1А, 2А, и поэтому нашлись бы решения уравнения (1.1), не стремящиеся к нулю при $t \to \infty$. Условие $\mathfrak{J}_3^*(p, q) = \infty$

[1] При $p(t) \equiv 0$, $b = \infty$ имеем, очевидно, $\mathfrak{J}_1 = \infty$, $\mathfrak{J}_4 = \int^{\infty} tq(t)\,dt$.

представляет собой, приблизительно говоря, некоторое интегральное ограничение на совместную скорость роста $p(t)$ и убывания $q(t)$; как отмечалось в [70], оно выполняется, в частности, если $p(t) \leqslant c_1 t^r$, $q(t) \geqslant c_2 t^{r-1}$ для некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$[1].

1.6. Некоторые из приведенных выше утверждений допускают обобщение на случай произвольной (вообще говоря, комплекснозначной) функции $q(t)$, однако при этом теряется та окончательность, которая характерна для вещественной знакопостоянной $q(t)$. Пример: *для того чтобы уравнение* (1.1) *обладало фундаментальной системой решений вида* $x_1(t) = 1 + o(1)$, $x_2(t) = o(1)$ *при* $t \to b$, *достаточно (а в случае знакопостоянной функции* $q(t)$ *и необходимо), чтобы выполнялись условия* $\mathfrak{J}_1(p) < \infty$, $\mathfrak{J}_3^*(p, |q|) < \infty$.

Это утверждение для $b = \infty$ было сформулировано в [53] ($\mathfrak{J}_3^*$ опять-таки может быть заменено на $\mathfrak{J}_3$); впрочем, достаточность (при $b = \infty$) получена еще А. Винтнером [50].

Еще один результат такого же характера: *для того чтобы существовали решения* (1.1)*, стремящиеся при* $t \to b$ *к ненулевым постоянным, достаточно (а в случае знакопостоянной* $q(t)$ *и необходимо), чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:*

1) $\mathfrak{J}_1(p) < \infty$, $\mathfrak{J}_3(p, |q|) < \infty$;

2) $\mathfrak{J}_1(p) = \infty$, $\mathfrak{J}_4(p, |q|) < \infty$.

Необходимый и достаточный характер этих утверждений при знакопостоянной $q(t)$ непосредственно усматривается из таблиц.

1.7. Теорема 1.1 естественным образом распространяется на уравнение

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dx}{dt}\right] + f(t)x = 0 \quad (a \leqslant t < b \leqslant \infty)\,, \tag{1.2}$$

где $r(t) > 0$ (можно требовать несколько меньшего, см. § 2); для перехода от (1.1) к (1.2) достаточно умножить (1.1) на $\exp\left(\int^t p(\tau)\,d\tau\right)$. При таком переходе, очевидно,

$$r(t) = \exp\left(\int^t p(\tau)\,d\tau\right), \quad f(t) = q(t)\exp\left(\int^t p(\tau)\,d\tau\right)$$

(так что, в частности, $\operatorname{sign} f(t) \equiv \operatorname{sign} q(t)$). Поэтому $\mathfrak{J}_1(p)$, $\mathfrak{J}_2(p,q)$, $\mathfrak{J}_3(p,q)$, $\mathfrak{J}_4(p,q)$, $\mathfrak{J}_3^*(p,q)$, $\mathfrak{J}_4^*(p,q)$ для уравнения (1.2) заменяются соответственно следующими (кстати, более компактными) выражениями:

$$I_1(r) = \int^b \frac{dt}{r(t)}, \quad I_2(f) = \int^b f(t)\,dt, \quad I_3(r,f) = \int^b f(t)\,dt \int_t^b \frac{ds}{r(s)},$$

$$I_4(r,f) = \int^b f(t)\,dt \int^t \frac{ds}{r(s)}, \quad I_3^*(r,f) = \int^b \frac{dt}{r(t)} \int^t f(s)\,ds,$$

[1] Это легко устанавливается с помощью общеизвестных асимптотических формул.

$$I_4^*(r,f)=\int^b \frac{dt}{r(t)}\int_t^b f(s)\,ds.$$

Таблицы 1, 2 остаются в силе и для уравнения (1.2), надо лишь заменить $\mathfrak{J}_k$, $\mathfrak{J}_k^*$ на I_k, I_k^*. Минимальное решение $x_2(t)$ в новых терминах определяется, очевидно, соотношением

$$\int^b \frac{dt}{r(t)x_2^2(t)}=\infty.$$

§ 2. Теоремы о возмущении. Доказательства утверждений, изложенных в § 1

2.1. В дальнейшем мы часто пользуемся записью уравнения (1.1) в форме (1.2), что, как отмечалось, приводит к более компактным формулам. При этом предполагается, что $r(t)\geqslant 0$, функции $1/r(t)$ и $f(t)$ локально суммируемы на $[a,b)$, а функции $r(t)$ и $\dot x(t)$ абсолютно непрерывны в $[a,b)$ (впрочем, для многих вопросов существенна лишь абсолютная непрерывность произведения $r\dot x$). Выясним, как связано поведение решений уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dy}{dt}\right]+h(t)y=0\quad(a\leqslant t<b\leqslant\infty)\,, \tag{2.1}$$

где $h(t)$ вещественна, с поведением решений «возмущенного» уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dx}{dt}\right]+[h(t)+f(t)]x=0\quad(a\leqslant t<b) \tag{2.2}$$

при $t\to b$. Предполагается, что решения (2.1) не колеблются на $[a,b]$ (для доказательства теоремы 1.1 нам понадобится лишь случай $h(t)\equiv 0$). Фундаментальные системы для всех вещественных уравнений неколебательного типа выбираются, как и прежде, из решений, положительных вблизи точки b, причем второе из решений — минимальное при $t\to b$.

Теорема 2.1. *Пусть комплекснозначная функция $f(t)$ удовлетворяет условию*

$$\int^b y_1(t)y_2(t)|f(t)|\,dt<\infty. \tag{2.3}$$

Тогда (2.2) *обладает фундаментальной системой $x_1(t)$, $x_2(t)$ такой, что при $t\to b$*

$$x_1(t)=y_1(t)[1+o(1)],\quad x_2(t)=y_2(t)[1+o(1)], \tag{2.4}$$

$$\dot x_1(t)=\dot y_1(t)[1+o(1)]+o\left(\frac{1}{ry_2}\right),\quad \dot x_2(t)=\dot y_2(t)[1+o(1)]+o\left(\frac{1}{ry_1}\right). \tag{2.5}$$

Из (2.4), очевидно, следует, что для любого решения $x(t)$ уравнения (2.2) найдется решение $y(t)\sim x(t)$ $(t\to b)$ уравнения (2.1).

Следующий результат относится к случаю вещественной знакопостоянной $f(t)$ и показывает, в частности, что при знакопостоянных возмущениях условие (2.3) является не только достаточным, но и необходимым для любого из соотношений (2.4).

Теорема 2.2. *Пусть $f(t)$ знакопостоянна и*

$$\int^{b} y_1(t)y_2(t)|f(t)|\,dt = \infty. \tag{2.6}$$

Тогда:

а) если $f(t) \geqslant 0$ и решения (2.2) *не колеблются, то*

$$\frac{x_1(t)}{y_1(t)} \downarrow 0, \quad \frac{x_2(t)}{y_2(t)} \uparrow \infty \quad (t \to b); \tag{2.7}$$

б) если $f(t) \leqslant 0$, то

$$\frac{x_1(t)}{y_1(t)} \uparrow \infty, \quad \frac{x_2(t)}{y_2(t)} \downarrow 0 \quad (t \to b). \tag{2.8}$$

Для $r(t) \equiv 1$, $b = \infty$ теорема 2.1 была доказана А. Халанаем [2], который установил также необходимость условия (2.3) для выполнения соотношений (2.4) в случае знакопостоянной $f(t)$ при некоторых дополнительных предположениях (как показывает теорема 2.2, они излишни). А. Халанай пользовался методом последовательных приближений; мы здесь применим другой прием, который можно назвать «редукцией окрестностей». Суть его состоит в следующем: с помощью соответствующих замен переменной и функции вопрос о возмущении уравнения общего вида (2.1) сводится к вопросу о возмущении некоторого простейшего уравнения (в нашем случае это $\ddot{v} = 0$); здесь используются известные результаты, после чего возвращаемся к исходному уравнению. Отметим, что этот прием, несмотря на свой элементарный характер, имеет весьма много приложений (также и для уравнений колебательного типа). Здесь мы на этом не будем останавливаться.

Нам понадобятся следующие известные факты.

Лемма 2.1. *(см. [146], а также [1, 72, 73, 138]). Если комплекснозначная функция $\varepsilon(s)$ удовлетворяет условию*

$$\int^{\infty} s|\varepsilon(s)|\,ds < \infty, \tag{2.9}$$

то уравнение

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \varepsilon(s)v = 0 \quad (0 \leqslant s < \infty) \tag{2.10}$$

обладает фундаментальной системой $v_1(s)$, $v_2(s)$ такой, что при $s \to \infty$

$$v_1 = s[1 + o(1)], \quad v_2 \to 1, \tag{2.11}$$

$$\frac{dv_1}{ds} \to 1, \quad \frac{dv_2}{ds} = o\left(\frac{1}{s}\right). \tag{2.12}$$

Лемма 2.2. *(см. [1, 51, 138]). Пусть $\varepsilon(s)$ знакопостоянна и*

$$\int^{\infty} s|\varepsilon(s)|\,ds = \infty. \tag{2.13}$$

Тогда:

а) если $\varepsilon(s) \geqslant 0$ и решения уравнения (2.10) *не колеблются, то*

$$\frac{v_1}{s} \downarrow 0, \quad v_2 \uparrow \infty \quad (s \to \infty); \tag{2.14}$$

б) если $\varepsilon(s) \leqslant 0$, то

$$\frac{v_1}{s} \uparrow \infty, \quad v_2 \downarrow 0 \quad (s \to \infty). \tag{2.15}$$

Из вогнутости $v_1(s)$, $v_2(s)$ в случае а) и выпуклости их в случае б) вытекает также, что $\dot{v}_1 \downarrow 0$, $\dot{v}_2 \downarrow 0$ в условиях а) и $\dot{v}_1 \uparrow \infty$, $\dot{v}_2 \uparrow 0$ в условиях б).

Переходим к доказательству теорем 2.1 и 2.2. Без ограничения общности можно считать, что $y_2(t) > 0$ на $[a, b)$ и

$$s(t) = \frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \int\limits_a^t \frac{d\tau}{r(\tau)y_2^2(\tau)} \tag{2.16}$$

(ясно, что выбор функции $y_1(t)$ не имеет значения). Очевидно, $s(t) \uparrow \infty$ при $t \to b$. Положим

$$x(t) = y_2(t)v(t) \tag{2.17}$$

и введем новую переменную $s = s(t)$, определенную соотношением (2.16). Тогда, как показывает подсчет, (2.2) перейдет в следующее уравнение:

$$\frac{d^2\tilde{v}}{ds^2} + \tilde{r}\tilde{y}_2^4\tilde{f}\tilde{v} = 0 \quad (0 \leqslant s < \infty). \tag{2.18}$$

Здесь $\tilde{v}(s) = v[t(s)]$ и такой же смысл имеют $\tilde{r}(s)$, $\tilde{y}_2(s)$, $\tilde{f}(s)$. Мы получили, таким образом, уравнение вида (2.10) с $\varepsilon(s) = \tilde{r}(s)\tilde{y}_2^4(s)\tilde{f}(s)$; для применимости лемм 2.1 и 2.2 основное значение имеет поэтому сходимость или расходимость интеграла

$$\int\limits^{\infty} s|\varepsilon(s)|\,ds = \int\limits^{\infty} s\tilde{r}(s)\tilde{y}_2^4(s)|\tilde{f}(s)|\,ds =$$
$$= \int\limits^{b} \frac{y_1(t)}{y_2(t)} r(t)y_2^4(t)|f(t)|\frac{dt}{r(t)y_2^2(t)} = \int\limits^{b} y_1(t)y_2(t)|f(t)|\,dt. \tag{2.19}$$

Теоремы 2.1 и 2.2 получаются теперь как следствия лемм 2.1 и 2.2, отнесенных к уравнению (2.18). В самом деле, пусть уравнение (2.2) удовлетворяет условиям теоремы 2.1; тогда, в силу (2.19), уравнение (2.18) удовлетворяет условиям леммы 2.1 и обладает поэтому фундаментальной системой $\tilde{v}_1(s)$, $\tilde{v}_2(s)$, для которой выполнены соотношения (2.11), (2.12). В соответствии с (2.17) определим решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ уравнения (2.2) формулами

$$x_i(t) = y_2(t)v_i(t), \quad i = 1, 2. \tag{2.20}$$

В силу (2.11), имеем:

$$x_1(t) = y_2(t)v_1(t) \sim y_2(t)s(t) = y_1(t), \quad x_2(t) = y_2(t)v_2(t) \sim y_2(t) \quad (t \to b).$$

Соотношения (2.4), таким образом, доказаны.

Для доказательства соотношений (2.5) следует переписать (2.12), возвращаясь к переменной t:

$$ry_2^2\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1}{y_2}\right)\to 1,\quad ry_2^2\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{y_2}\right)=o\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\quad (t\to b).$$

Раскрывая скобки и заменяя $\dot y_2$ на $\dfrac{1}{y_1}\left(\dot y_1 y_2-\dfrac{1}{r}\right)$, а x_i на $y_i[1+o(1)]$, $i=1,2$, получаем (2.5). Теорема 2.1 доказана.

Пусть теперь для уравнения (2.2) выполнены условия теоремы 2.2а (2.2б). Неколебательность решений (2.2) на $[a,b)$ эквивалентна неколебательности решений (2.18) на $[0,\infty)$, и знак коэффициента при $\tilde v(s)$ в (2.18) совпадает со знаком $f(t)$. Учитывая (2.19), убеждаемся, что для (2.18) выполнены условия леммы 2.2а (2.2б), и фундаментальная система $\tilde v_1(s)$, $\tilde v_2(s)$ должна поэтому удовлетворять соотношениям (2.14), (2.15), откуда

$$\frac{x_1(t)}{y_1(t)}=\frac{v_1(t)}{s(t)}\downarrow 0\,(\uparrow\infty),\quad \frac{x_2(t)}{y_2(t)}=v_2(t)\uparrow\infty\,(\downarrow 0)\quad (t\to b),$$

что и требовалось доказать.

Отметим еще (хотя нам это и не потребуется), что в условиях теоремы 2.1 для отыскания x_1, x_2 применим метод последовательных приближений (если известны y_1, y_2). Это делается по тем же схемам, что и в работах А. Халаная, У. Ришарда и М. Раба (см. [2, 147, 148]), где подробно изучался вопрос о последовательных приближениях в условиях типа (2.3) (при $b=\infty$). В связи с этим нельзя не упомянуть также работу Ю. Б. Гермейера и Д. С. Иргера [149].

2.2. Переходим к доказательству теоремы 1.1. Для этого применим теоремы 2.1 и 2.2 к уравнению (1.2), рассматривая последнее как возмущение уравнения

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dy}{dt}\right]=0,\quad (a\leqslant t<b).\tag{2.21}$$

Решая уравнение (2.21), получаем, в соответствии с вышепринятым правилом нумерации, два возможных варианта для фундаментальной системы:

$$1)\ I_1(r)=\int^b\frac{dt}{r(t)}<\infty;\quad y_1(t)=1,\quad y_2(t)=\int_t^b\frac{d\tau}{r(\tau)};\tag{2.22}$$

$$2)\ I_1(r)=\int^b\frac{dt}{r(t)}=\infty;\quad y_1(t)=\int^t\frac{d\tau}{r(\tau)},\quad y_2(t)=1.\tag{2.23}$$

Пусть $I_1(r)<\infty$ (так как $I_1(r)=\mathfrak{I}_1(p)$, то этому соответствуют случаи 1—3 таблиц). В силу (2.22), имеем

$$\int^b y_1(t)y_2(t)|f(t)|\,dt=\int^b|f(t)|\,dt\int_t^b\frac{d\tau}{r(\tau)}=I_3(r,|f|).\tag{2.24}$$

Поэтому, если $I_3(r,|f|)<\infty$, то, в силу теоремы 2.1, уравнение (1.2) обладает фундаментальной системой $x_1(t)$, $x_2(t)$ такой, что

$$x_1(t)\to 1,\quad x_2(t)\sim\int_t^b\frac{d\tau}{r(\tau)}\quad (t\to b),\tag{2.25}$$

$$\dot{x}_1(t)r(t)\int\limits_t^b \frac{d\tau}{r(\tau)} \to 0, \quad \dot{x}_2(t) \sim -\frac{1}{r(t)} \quad (t \to b). \tag{2.26}$$

Это верно для произвольной (вообще говоря, комплекснозначной) функции $f(t)$; если $f(t)$ знакопостоянна, то $I_3(r,|f|)$, очевидно, можно заменить на $|I_3(r,f)|$.

Для случая, когда $f(t)$ знакопостоянна и $|I_3| = \infty$, в силу теоремы 2.2, получаем:

а) если $f(t) \geqslant 0$, $I_1 < \infty$, $I_3 = \infty$ и решения (1.2) не колеблются, то

$$x_1(t) \downarrow 0, \quad x_2(t)\biggl(\int\limits_t^b \frac{d\tau}{r(\tau)}\biggr)^{-1} \uparrow \infty \quad (t \to b);$$

б) если $f(t) \leqslant 0$, $I_1 < \infty$, $I_3 = -\infty$, то

$$x_1(t) \uparrow \infty, \quad x_2(t)\biggl(\int\limits_t^b \frac{d\tau}{r(\tau)}\biggr)^{-1} \downarrow 0 \quad (t \to b).$$

В обоих случаях, очевидно, $x_2(t) \downarrow 0$ $\Bigl($для а) это следует из $\dfrac{x_2}{x_1}\downarrow 0\Bigr)$.

Для того чтобы закончить рассмотрение случаев 1—3, осталось выяснить вопрос о возрастании или убывании $x_1(t)$, определяющий различие между случаями 1 и 2. Пусть имеет место случай 2A (2B): $f(t) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, $I_1 < \infty$, $|I_2| = \infty$, $|I_3| < \infty$. Из (1.2) легко находим

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{r(t)}\biggl(c - \int\limits_a^t f(\tau)x_1(\tau)\,d\tau\biggr). \tag{2.27}$$

Так как, по доказанному, $x_1(t) \to 1$ при $t \to b$, то из условия $I_2(f) = \displaystyle\int^b f(\tau)\,d\tau = \infty(-\infty)$ и знакопостоянства $f(t)$ следует, что

$$\int^b f(\tau)x_1(\tau)\,d\tau = \infty\,(-\infty).$$

Отсюда и из (2.27) вытекает отрицательность (положительность) функции $\dot{x}_1(t)$ вблизи точки b.

Поведение $x_1(t)$ (с точки зрения монотонности) в случае 1 ($I_1 < \infty$, $|I_2| < \infty$) можно выяснить, произведя в уравнении (1.2) замену переменной

$$s = \int\limits_a^t \frac{d\tau}{r(\tau)}, \tag{2.28}$$

которая является полезной и в других отношениях; уравнение (1.2) после умножения на r примет вид

$$\frac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + \tilde{r}\tilde{f}\tilde{x} = 0 \quad \biggl(0 \leqslant s < s^* = \int\limits_a^b \frac{d\tau}{r(\tau)}\biggr). \tag{2.29}$$

Здесь $\tilde{x}(s) = x[t(s)]$, и таков же смысл $\tilde{r}(s)$, $\tilde{f}(s)$. Так как $I_1 < \infty$, то промежуток $[0, s^*)$ является ограниченным; далее,

$$\int\limits_0^{s^*} |\tilde{r}(s)\tilde{f}(s)|\, ds = \left| \int\limits_a^b f(t)\, dt \right| = |I_2(f)| < \infty.$$

Таким образом, точка $s = s^*$ при сделанных предположениях не является сингулярной для уравнения (2.29), так что любой паре чисел α, β соответствует (взаимно однозначно) решение $\tilde{x}(s)$ уравнения (2.29), удовлетворяющее условиям $\tilde{x}(s^*) = \alpha$, $\tilde{x}'(s^*) = \beta$ (имеется в виду левая производная). Полагая, например, $\alpha = 1$, $\beta = 1\,(-1)$, получим решение $\tilde{x}(s)$ уравнения (2.29) такое, что $\tilde{x}(s) \uparrow 1\,(\downarrow 1)$ при $s \to s^*$; для уравнения (1.2) получаем, следовательно, решение $x(t)$ (очевидно, неминимальное) такое, что $x(t) \uparrow 1\,(\downarrow 1)$ при $t \to b$. Тем самым доказано, что в случае 1 $x_1 \uparrow\downarrow 1$. Отметим еще, что каждое нетривиальное решение (1.2) является строго монотонным вблизи точки b, исключая случай

$$f(t) \equiv 0 \text{ почти всюду на } (t_0, b) \text{ для некоторого } t_0 < b. \tag{2.30}$$

Это утверждение вытекает из знакопостоянства $f(t)$ и неколебательности решений. В самом деле, строгая монотонность $x(t)$ вблизи b эквивалентна строгой монотонности $\tilde{x}(s)$ вблизи s^*; предполагая, без ограничения общности, что $\tilde{x}(s) > 0$ на (s_0, s^*), и учитывая уравнение (2.29), убеждаемся в вогнутости (выпуклости) $\tilde{x}(s)$ на (s_0, s^*) при $f \geqslant 0$ ($\leqslant 0$). Отсюда строгая монотонность $\tilde{x}(s)$ вблизи точки b вытекает очевидным образом, так как возможность $\tilde{x}(s) \equiv \text{const}\,(\neq 0)$ вблизи b исключена вместе с (2.30).

Переходим теперь к случаю $I_1(r) = \infty$ (соответствующему случаям 4 и 5 таблицы 1, который несколько проще. Имеем

$$\int^b y_1(t) y_2(t) |f(t)|\, dt = \int^b |f(t)|\, dt \int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} = I_4(r, |f|). \tag{2.31}$$

Поэтому, если функция $f(t)$ (вообще говоря, комплекснозначная) удовлетворяет условию $I_4(r, |f|) < \infty$, то, в силу теоремы 2.1,

$$x_1(t) \sim \int^t \frac{d\tau}{r(\tau)}, \quad x_2(t) \to 1 \quad (t \to b), \tag{2.32}$$

$$\dot{x}_1(t) \sim \frac{1}{r(t)}, \quad \dot{x}_2(t) r(t) \int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \to 0 \quad (t \to b). \tag{2.33}$$

В случае, когда $f(t)$ знакопостоянна и $|I_4(r, f)| = \infty$, теорема 2.2 дает:

а) если $f(t) \geqslant 0$, $I_1 = \infty$, $I_4 = \infty$ и решения (1.2) не колеблются, то

$$x_1(t) \left(\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \right)^{-1} \downarrow 0, \quad x_2(t) \uparrow \infty \quad (t \to b); \tag{2.34}$$

б) если $f(t) \leqslant 0$, $I_1 = \infty$, $I_4 = -\infty$, то

$$x_1(t) \left(\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \right)^{-1} \uparrow \infty, \quad x_2(t) \downarrow 0 \quad (t \to b). \tag{2.35}$$

Ясно, что в обоих случаях $x_1(t) \uparrow \infty$. Соотношения (2.32)— (2.35) можно было бы получить и непосредственным применением лемм 2.1 и 2.2 к уравнению (2.29), получающемуся после замены переменной (2.28), так как в рассматриваемых случаях $s^* = \infty$. Такой способ позволяет также выяснить вопрос о монотонности $x_2(t)$ в случае 4 ($I_1 = \infty$, $|I_4| < \infty$): $x_2 \uparrow 1$, если $f \geqslant 0$, и $x_2 \downarrow 1$, если $f \leqslant 0$, причем монотонность является строгой, за исключением случая (2.30). Это немедленно вытекает из того, что при $f \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) функция $\tilde{x}_2(s)$ стремится к единице (при $s \to \infty$), будучи вогнутой (выпуклой) функцией s.

Итак, теорема 1.1 доказана. Попутно обоснованы также оба утверждения, сформулированные в п. 1.6 предыдущего параграфа, поскольку соотношения (2.25), (2.32) получены без предположения о вещественности $f(t)$.

2.3. Рассмотрим теперь хотя и элементарный, но не слишком очевидный вопрос о связи между сходимостью интегралов $\mathfrak{J}_k$ и $\mathfrak{J}_k^*$, $k = 3, 4$. Здесь также целесообразно перейти к более компактным обозначениям I_k, I_k^*. Нам понадобится следующая

Лемма 2.3. *Пусть абсолютно непрерывные и знакопостоянные на полуинтервале $a \leqslant t < b \leqslant \infty$ функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ таковы, что $\int\limits^{b} \alpha(t)\dot{\beta}(t)dt$ сходится. Тогда $\int\limits^{b} \dot{\alpha}(t)\beta(t)dt$ также сходится, если только выполнено одно из следующих условий:*

1) $|\alpha(t)|$ не возрастает;

2) $|\alpha(t)|$ не убывает и $|\beta(t)| \downarrow 0$ при $t \to b$.

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_a^t \dot{\alpha}(\tau)\beta(\tau)\,d\tau = \alpha(t)\beta(t) - \alpha(a)\beta(a) - \int\limits_a^t \alpha(\tau)\dot{\beta}(\tau)\,d\tau. \qquad (2.36)$$

Так как $\dot{\alpha}(\tau)\beta(\tau)$ не меняет знака, то достаточно доказать ограниченность стоящего в левой части формулы (2.36) интеграла, а для этого, в свою очередь, в силу (2.36), достаточно доказать ограниченность $\alpha(t)\beta(t)$ на $[a, b)$. Очевидно, без ограничения общности можно считать, что $\alpha(t) \neq 0$ на $[a, b)$. Функция $\dfrac{1}{|\alpha(t)|}$ в случае 1) не убывает, а в случае 2) не возрастает. Поэтому ограниченность $\alpha(t)\beta(t)$ в обоих случаях вытекает из второй теоремы о среднем:

$$1)\ \alpha(t)\beta(t) = \alpha(t)\left[\beta(a) + \int\limits_a^t \dot{\beta}(\tau)d\tau\right] = \alpha(t)\beta(a) + \alpha(t)\int\limits_a^t \frac{1}{\alpha(\tau)}\alpha(\tau)\dot{\beta}(\tau)d\tau = \alpha(t)\beta(a) +$$
$$+ \int\limits_\xi^t \alpha(\tau)\dot{\beta}(\tau)\,d\tau \quad (a \leqslant \xi \leqslant t < b);$$

2) $\alpha(t)\beta(t) = -\alpha(t)\int\limits_t^b \dot\beta(\tau)\,d\tau = -\alpha(t)\int\limits_t^b \frac{1}{\alpha(\tau)}\alpha(\tau)\dot\beta(\tau)\,d\tau =$

$$= -\int\limits_t^\xi \alpha(\tau)\dot\beta(\tau)\,d\tau \quad (a \leqslant t < \xi \leqslant b).$$

Лемма доказана.

Теперь легко находим (функция f знакопостоянна):

$$\{I_1 < \infty, |I_3| < \infty\} \to |I_3^*| < \infty \left(\alpha = \int_t^b \frac{d\tau}{r},\ \beta = \int\limits_a^t f d\tau,\ \text{случай 1)}\right);$$

$$\{I_1 < \infty, |I_3^*| < \infty\} \to |I_3| < \infty \left(\alpha = \int\limits_a^t f d\tau,\ \beta = \int_t^b \frac{d\tau}{r},\ \text{случай 2)}\right);$$

$$\{I_1 = \infty, |I_2| < \infty, |I_4^*| < \infty\} \to |I_4| < \infty \quad \left(\alpha = \int\limits_t^b f d\tau,\ \beta = \int_a^t \frac{d\tau}{r},\ \text{случай 1)}\right);$$

$$\{I_1 = \infty, |I_4| < \infty\} \to \{|I_2| < \infty, |I_4^*| < \infty\} \quad \left(\alpha = \int_a^t \frac{d\tau}{r},\ \beta = \int\limits_t^b f d\tau,\ \text{случай 2)}\right).$$

В последнем случае сходимость I_2 непосредственно вытекает из условий $|I_4| < \infty$, $\alpha(t) \uparrow \infty$. Установленные связи между сходимостью I_k, I_k^* допускают очевидные переформулировки в терминах расходимости, например, если $I_1 = |I_4| = \infty$, то либо $|I_2| = \infty$, либо $|I_2| < \infty$, $|I_4^*| = \infty$ и т. д.

Таким образом, таблица 2идентична таблице 1, за исключением случая 6А. Чтобы доказать колебательность решений в этом случае, достаточно доказать колебательность решений (1.2) в случае $I_1 = I_2 = \infty$, а это, в свою очередь, эквивалентно колебательности решений (2.29) на $[0,\infty)$ при условии

$$\int\limits^\infty \tilde r(s)\tilde f(s)\,ds = \int\limits^b f(t)\,dt = I_2 = \infty.$$

Но колебательность решений уравнения $y''+g(s)y=0$ на $[0,\infty)$ в случае $\int\limits^\infty g(s)\,ds = \infty$ (даже при знакопеременной $g(s)$) хорошо известна (см., например, [140]).

Итак, содержание таблиц 1 и 2 полностью обосновано.

2.4. Из утверждений предыдущего параграфа, за исключением «колебательной» части теоремы 7 из [53] (доказанной в этой же работе), осталось проверить лишь одно (см. п. 1.5): о том, что в случае 3А, $b = \infty$ функции $\dot x_1(t)$, $\dot x_2(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$, если $p(t)$ ограничена сверху, либо если $p(t)$ ограничена снизу, а $q(t)$ — сверху. Установим несколько более общее предложение.

Теорема 2.3. *Пусть $b = \infty$ и выполнены условия 3А (решения* (1.1) *не колеблются, $q(t) \geqslant 0$, $\mathfrak{J}_1 < \infty$, $\mathfrak{J}_3 = \infty$). Пусть, кроме того, имеет место по крайней мере одно из условий:*

1) $\int\limits_{t_1}^{t_2} p(s)\,ds \leqslant c < \infty$ *для всех t_1, t_2 таких, что $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_1 + 1$;*

2) $\int\limits_{t_1}^{t_2} p(s)\,ds \geqslant c_1 > -\infty \quad (a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_1+1)$ *и* $\int\limits_{t}^{t+1} q(s)\,ds \leqslant c_2 < \infty \ (t \geqslant a).$

Тогда не только решения уравнения (1.1)*, но и их первые производные стремятся к нулю при* $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть $x(t)$ — произвольное решение уравнения (1.1); покажем, что $\dot{x}(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x(t) > 0$ при больших значениях t, и, следовательно, в соответствии с теоремой 1.1, $x(t) \downarrow 0$ при $t \to \infty$. Функция $u(t) = -\dot{x}(t)$ является поэтому неотрицательной (при больших t) и суммируемой на полуоси $[a, \infty)$:

$$u(t) \geqslant 0 \quad (t \geqslant t_0), \qquad \int^{\infty} u(t)\,dt < \infty. \tag{2.37}$$

Будем доказывать теорему от противного: пусть $u(t)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$, такие, что $u(t_k) = \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$ (напомним, что $u(t)$ непрерывна и, в силу (2.37), $\liminf u(t) = 0$ при $t \to \infty$). Без ограничения общности можно считать, что $t_{k+1} - t_k > 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Мы получим противоречие с (2.37), если укажем на (t_0, ∞) бесконечную последовательность неналегающих интервалов единичной длины, на которых $u(t)$ равномерно ограничена снизу положительной постоянной; в случае 1) это будут интервалы $(t_k, t_k + 1)$, в случае 2) — интервалы $(t_k - 1, t_k)$ при достаточно больших k.

Действительно, уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$\dot{u} = -p(t)u + q(t)x. \tag{2.38}$$

Если выполнено условие 1), то вытекающее из (2.38) неравенство $\dot{u} \geqslant -p(t)u$ в сочетании с соотношением $u(t_k) = \varepsilon$ и известной теоремой сравнения С. А. Чаплыгина [124] (см. также [125]), приводит к оценке

$$u(t) \geqslant \varepsilon \exp\left(-\int\limits_{t_k}^{t} p(s)\,ds\right) \geqslant \varepsilon e^{-c} \quad (t_k \leqslant t \leqslant t_k + 1).$$

Случай 2) немногим сложнее. Решая (2.38) как линейное уравнение относительно $u(t)$ и учитывая, что $u(t_k) = \varepsilon$, получаем

$$u(t) = \left[\varepsilon - \int\limits_{t}^{t_k} q(\tau)x(\tau)\exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t_k} p(s)\,ds\right)d\tau\right]\exp\left(\int\limits_{t}^{t_k} p(s)\,ds\right). \tag{2.39}$$

Первое из соотношений 2) показывает, что

$$\exp\left(\int\limits_{t}^{t_k} p(s)\,ds\right) \geqslant e^{c_1}, \quad \exp\left(-\int\limits_{t}^{t_k} p(s)\,ds\right) \leqslant e^{-c_1}\,(t_k - 1 \leqslant t \leqslant t_k). \tag{2.40}$$

Пусть k столь велико, что

$$x(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2c_2}e^{c_1} \quad (t \geqslant t_k - 1).$$

Тогда, учитывая вторые из неравенств (2.40), находим

$$\int\limits_t^{t_k} q(\tau)x(\tau)\exp\left(-\int\limits_\tau^{t_k} p(s)\,ds\right)d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2c_2}\int\limits_{t_k-1}^{t_k} q(\tau)\,d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (t_k-1\leqslant t\leqslant t_k). \qquad (2.41)$$

Соотношения (2.39), (2.41) вместе с первым неравенством (2.40) приводят (для достаточно больших k) к оценке

$$u(t) \geqslant \left(\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{c_1} = \frac{\varepsilon}{2}e^{c_1} \quad (t_k-1\leqslant t\leqslant t_k).$$

Теорема доказана.

§ 3. Дополнения и приложения

В этом параграфе будут получены некоторые асимптотические оценки решений и рассмотрены приложения полученных результатов к вопросам колебательности; мы коснемся также вопроса о переходе от уравнений вида $\ddot{x}+p\dot{x}+qx=0$ к уравнениям $\ddot{y}+fy=0$.

3.1. Выше было показано, что в случаях 1, 2, 4 асимптотическое поведение $x_1(t)$, $x_2(t)$ при $t\to b$ вполне определяется (с точностью до множителя $1+o(1)$) с помощью нескольких квадратур. В остальных случаях мы не располагаем столь эффективными средствами; однако оценки для скорости роста или убывания решений могут быть получены без особого труда. Приведем здесь две оценки такого рода: оценку сверху $|x(t)|$ в случае 3 и оценку снизу $|x(t)|$ в случае 5 таблицы 2 (ясно, что первая оценка относится по существу к x_1, а вторая — к x_2).

По-прежнему пользуемся записью уравнения в форме (1.2):

$$\frac{d}{dt}\left[r(t)\frac{dx}{dt}\right]+f(t)x=0 \quad (a\leqslant t<b\leqslant\infty).$$

Функцию $f(t)$ предполагаем теперь вещественной (вообще говоря, знакопеременной); в остальном предположения о коэффициентах прежние.

Теорема 3.1. *Пусть решения* (1.2) *не колеблются на* $[a,b)$. *Тогда*

а) если $I_1(r)<\infty$, *то для каждого решения* $x(t)$ *уравнения* (1.2) *справедлива оценка*

$$|x(t)| \leqslant c\exp\left(-\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)}\int^\tau f(s)\,ds\right) \quad (a\leqslant t<b); \qquad (3.1)$$

б) если $I_1(r)=\infty$ *и* $I_2(f)$ *сходится (вообще говоря, неабсолютно), то для каждого нетривиального решения* $x(t)$ *уравнения* (1.2) *при* t*, достаточно близких к* b*, справедлива оценка*

$$|x(t)| \geqslant c\exp\left(\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)}\int_\tau^b f(s)\,ds\right) \quad (t_0\leqslant t<b; c>0). \qquad (3.2)$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $x(t) > 0$ при $t_0 \leqslant t < b$. Положим $v = \dfrac{r\dot{x}}{x}$ или, что то же самое,

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{v(\tau)}{r(\tau)}\, d\tau \right) \quad (t_0 \leqslant t < b). \tag{3.3}$$

Легко проверить, что функция $v(t)$ абсолютно непрерывна при $t_0 \leqslant t < b$ и удовлетворяет уравнению

$$\dot{v} = -\frac{1}{r(t)} v^2 - f(t) \quad (t_0 \leqslant t < b), \tag{3.4}$$

откуда следует, что

$$\dot{v} \leqslant -f(t) \quad (t_0 \leqslant t < b). \tag{3.5}$$

Интегрируя это неравенство от t_0 до t, получаем

$$v(t) \leqslant c_1 - \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds \quad (t_0 \leqslant t < b). \tag{3.6}$$

Теперь утверждение а) вытекает из сопоставления формул (3.3) и (3.6); в силу условия $I_1 < \infty$ наличие постоянной c_1 в (3.6) влияет лишь на значение мультипликативной постоянной c в (3.1).

Для доказательства утверждения б) следует проинтегрировать неравенство (3.5) от t_0 до b, воспользовавшись сходимостью I_2 и соотношением

$$v(t) \to 0 \ \text{ при } \ t \to b, \tag{3.7}$$

которое будет доказано ниже. После интегрирования получаем неравенство

$$v(t) \geqslant \int_{t}^{b} f(s)\, ds \quad (t_0 \leqslant t < b),$$

сопоставление которого с (3.3) приводит к оценке (3.2).

Докажем теперь (3.7). Интегрируя уравнение (3.4) от $t_1\,(\geqslant t_0)$ до t, получим

$$v(t) = v(t_1) - \int_{t_1}^{t} f(s)\, ds - \omega(t) \quad (t_1 \leqslant t < b), \tag{3.8}$$

где

$$\omega(t) = \int_{t_1}^{t} \frac{v^2(s)}{r(s)}\, ds.$$

Будучи неубывающей функцией, $\omega(t)$ при $t \to b$ стремится к конечному пределу или к бесконечности; поэтому, в силу (3.8) и сходимости I_2,

$$v(t) \to \xi \ \text{ при } \ t \to b \quad (-\infty \leqslant \xi < \infty). \tag{3.9}$$

Соотношение (3.7) будет доказано, если убедимся, что случаи $\xi = \mathrm{const} \neq 0$ и $\xi = -\infty$ невозможны.

Пусть ξ — число, отличное от нуля. Тогда, в силу (3.8), $\omega(t)$ имеет конечный предел при $t \to b$; с другой стороны, учитывая (3.9) и условие $I_1 = \infty$, получаем

$$\omega(t) \sim \xi^2 \int^t \frac{ds}{r(s)} \to \infty \quad (t \to b).$$

Пусть теперь $\xi = -\infty$. Если t_1 достаточно близко к b, то, в силу (3.8),

$$v(t) \leqslant -\omega(t), \ \text{ т. е. } \ v^2(t) \geqslant \omega^2(t) \quad (t_1 \leqslant t < b). \tag{3.10}$$

Так как $v(t) \to -\infty$, то, ввиду (3.8), получим, что $\omega(t) \to \infty$ при $t \to b$; поэтому

$$\frac{1}{\omega(t)} \to 0 \quad (t \to b).$$

С другой стороны, учитывая (3.10) и условие $I_1 = \infty$, находим

$$\frac{1}{\omega(t)} = c - \int^t \frac{\dot\omega(s)}{\omega^2(s)}\, ds = c - \int^t \frac{v^2(s)ds}{\omega^2(s)r(s)} \leqslant c - \int^t \frac{ds}{r(s)} \to -\infty \quad (t \to b).$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.1.

Оценки (3.1), (3.2) показывают, что некоторые из утверждений таблицы 2 частично переносятся на случай знакопеременной функции $f(t)$ (в записи (1.1) — функции $q(t)$). Так, если решения уравнения (1.2) не колеблются, $I_1(r) < \infty$ и

$$\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \int^\tau f(s)\, ds \geqslant c_0 > -\infty \quad (a \leqslant t < b), \tag{3.11}$$

то решения (1.2) ограничены на $[a, b)$; условие (3.11), в частности, выполняется, если сходится $I_3^*(r, f)$. Отметим, что в отличие от случая $f \geqslant 0$ сходимость $I_3^*(r, f)$ сама по себе не обеспечивает неколебательности[1]. Далее, если решения не колеблются, $I_2(f)$ сходится и $I_1(r) = I_4^*(r, f) = \infty$, то $x_1(t) \to \infty$, $x_2(t) \to \infty$ $(t \to b)$. Эти обобщения, разумеется, отличаются от тех, которые встречались в предыдущих параграфах, так как здесь речь идет лишь об условной сходимости интегралов (и в предположении вещественности функции $f(t)$).

Оценка (3.2) для $r(t) \equiv 1$, $b = \infty$ неявно содержится в работе И. М. Соболя [51], который заметил также, что она может быть использована для получения признака колебательности. Докажем следующее, более общее предложение.

Следствие 3.1. *Решения уравнения* (1.2) *колеблются на* $[a, b)$ *в любом из следующих случаев:*

а) $I_1(r) < \infty$ *и*

$$\int^b \frac{1}{r(t)} \exp\left(2 \int^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \int^\tau f(s)\, ds\right) dt = \infty; \tag{3.12}$$

[1]Используя результат работы [150], можно показать, что неколебательность обеспечивается сходимостью $I_3(r, f)$, но для знакопеременной f условия сходимости I_3 и I_3^* не совпадают.

б) $I_1(r)=\infty$, $I_2(f)$ сходится и

$$\int^b \frac{1}{r(t)}\exp\left(-2\int^t \frac{d\tau}{r(\tau)}\int_\tau^b f(s)\,ds\right)dt<\infty. \tag{3.13}$$

Доказательство легко получается от противного, если заметить, что оценка (3.1) должна выполняться, в частности, для неминимального решения $x_1(t)$, а оценка (3.2) — для минимального решения $x_2(t)$. В самом деле, пусть решения (1.2) не колеблются. Если выполнены условия а), то имеет место оценка (3.1), которую для краткости запишем в виде $x_1(t)\leqslant\varphi(t)$. Отсюда

$$\int^b \frac{dt}{r\varphi^2}\leqslant\int^b \frac{dt}{rx_1^2}<\infty$$

(так как x_1 неминимально), что противоречит условию (3.12). Аналогично, если выполнены условия б), то для x_2 имеем оценку (3.2): $x_2(t)\geqslant\psi(t)$ $(t\geqslant t_0)$. Отсюда

$$\int^b \frac{dt}{r\psi^2}\geqslant\int^b \frac{dt}{rx_2^2}=\infty$$

(так как x_2 минимально), что противоречит условию (3.13).

Итак, утверждения а) и б) доказаны. Второе из них было получено в [51] (для $r(t)\equiv 1$, $b=\infty$; впрочем, здесь это не влияет на доказательство).

3.2. Рассмотрим вопрос о том, как влияет на неколебательность решений увеличение или уменьшение $p(t)$ (соответствующие формулировки для $b=\infty$ приводились в [70]). Пусть, наряду с (1.1),

$$Lx\equiv\ddot x+p(t)\dot x+q(t)x=0\quad(a\leqslant t<b\leqslant\infty),$$

дано еще одно уравнение:

$$L_1y\equiv\ddot y+p_1(t)\dot y+q_1(t)y=0\quad(a\leqslant t<b). \tag{3.14}$$

Как показывает теорема Штурма, колебательность решений «монотонно возрастает» с ростом «коэффициента упругости» $q(t)$: если $p_1(t)\equiv p(t)$, $q_1(t)\leqslant q(t)$ и решения (1.1) не колеблются, то и решения (3.14) не колеблются. Влияние изменения «коэффициента трения» $p(t)$ не столь просто и заведомо не «монотонно», как показывают простейшие уравнения с постоянными коэффициентами. Докажем следующее предложение.

Теорема 3.2. *Пусть $q(t)\geqslant 0$, $q_1(t)\leqslant q(t)$. Для неколебательности решений уравнения* (3.14) *достаточно выполнения одного из следующих условий $(t_0\leqslant t<b)$:*

а) решения (1.1) *не колеблются, $I_1(p)<\infty$ и $p_1(t)\geqslant p(t)$;*

б) решения (1.1) *не колеблются, $I_1(p)=\infty$ и $p_1(t)\leqslant p(t)$;*

в) $I_1(p)<\infty$, $I_2(p,q)<\infty$ и $p_1(t)$ сравнимо с $p(t)$ (т. е. либо $p_1\geqslant p$, либо $p_1\leqslant p$).

Доказательство основано на тех сведениях о монотонности решений, которые доставляет теорема 1.1, в сочетании с известным критерием неколебательности Валле-Пуссена [40] (см. также [125]): решения уравнения (3.14) не колеблются на $[a, b)$ в том и только том случае, если существует $x(t) > 0$ такая, что $L_1 x \leqslant 0$ ($t_0 \leqslant t < b$; $\dot{x}(t)$ абсолютно непрерывна при $t < b$). Действительно, в условиях а) для уравнения (1.1) имеет место один из случаев 1A, 2A, 3A; следовательно, существует решение $x(t)$ этого уравнения, положительное и убывающее вблизи точки b. Отсюда

$$L_1 x = L_1 x - Lx = [p_1(t) - p(t)]\dot{x} + [q_1(t) - q(t)]x \leqslant 0 \quad (t_0 \leqslant t < b), \tag{3.15}$$

поскольку $p_1 \geqslant p$, $q_1 \leqslant q$. Тем самым условие а) доказано. Аналогично, в условиях б) для (1.1) имеет место один из случаев 4A, 5A и, следовательно, существует решение $x(t)$, положительное и возрастающее вблизи b. Это опять приводит к неравенству (3.15), так как теперь $p_1 \leqslant p$. Наконец, условия в) показывают, что в этом случае мы имеем дело с 1A, т. е. уравнение (1.1) обладает и положительными возрастающими, и положительными убывающими (вблизи точки b) решениями. При $p_1 \leqslant p$ ($p_1 \geqslant p$) в качестве $x(t)$ выбираем решение уравнения (1.1), положительное и возрастающее (убывающее) вблизи точки b, после чего снова приходим к неравенству (3.15). Теорема доказана.

Ясно, что эти же утверждения могут быть сформулированы и как признаки колебательности. Например: *решения* (1.1) *колеблются, если колеблются решения* (3.14) *и при этом* $I_1(p) < \infty$, $q(t) \geqslant 0$, $p(t) \leqslant p_1(t)$, $q(t) \geqslant q_1(t)$ (что, очевидно, эквивалентно а)) и т. п.

Отметим, что утверждение в) сохраняется и для знакопеременной $q(t)$, если условие $I_2(p, q) < \infty$ заменить условием $I_2(p, |q|) < \infty$. Действительно, из доказательства, проведенного в § 2, нетрудно усмотреть, что и при этих предположениях уравнение (1.1) обладает возрастающими и убывающими положительными решениями; единственное изменение заключается в том, что некоторые решения (1.1) в этом случае могут быть немонотонными (именно, те, для которых $\beta = \tilde{x}'(s^*)$, см. § 2), но здесь это не имеет значения.

Следует подчеркнуть, что в отличие от теорем штурмовского типа полученные выше теоремы сравнения носят чисто асимптотический характер. Например, утверждение «если $I_1(p) = \infty$, $p(t) \geqslant p_1(t)$, $q(t) \geqslant q_1(t)$, $q(t) \geqslant 0$, то между двумя нулями нетривиального решения (3.14) лежит по крайней мере один нуль любого решения (1.1)» было бы заведомо неверным: можно лишь утверждать, что при этих условиях колебательность решений уравнения (3.14) влечет за собой колебательность решений (1.1). Отметим, что теоремы штурмовского типа можно легко получить с помощью подстановки

$$x(t) = u(t) \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{t} p(\tau)\,d\tau\right), \quad y(t) = v(t) \exp\left(-\frac{1}{2}\int^{t} p_1(\tau)\,d\tau\right),$$

если в качестве предпосылок использовать неравенства, связывающие не только $p(t)$, $p_1(t)$, но и $\dot{p}(t)$, $\dot{p}_1(t)$; в настоящей работе мы избегаем требований, связанных с гладкостью коэффициентов.

Приведем два результата, иллюстрирующих применение теоремы 3.2.

Следствие 3.2. *Пусть* $p_1(t) \geqslant p(t)$, $0 \leqslant q_1(t) \leqslant q(t)$. *Если решения* (1.1) *не колеблются и ограничены на* $[a, b)$, *то это же верно и для решений* (3.14).

Сформулированное предложение, само по себе отнюдь не очевидное, легко получается «сцеплением» вышеизложенных фактов. В самом деле, теорема 1.1 показывает, что для уравнения (1.1) имеет место один из случаев 1A, 2A, 3A, т. е. $I_1(p) < \infty$. В силу утверждения а) теоремы 3.2 заключаем, что решения (3.14) не колеблются. Далее, из неравенств $I_1(p) < \infty$, $p_1(t) \geqslant p(t)$ вытекает, что $I_1(p_1) < \infty$; для уравнения (3.14), следовательно, также имеет место один из случаев 1A, 2A, 3A, что доказывает ограниченность решений.

Второй из упомянутых результатов относится к семейству вещественных уравнений, зависящих от параметра,

$$\ddot{x} + p(t,\omega)\dot{x} + q(t)x = 0 \quad (a \leqslant t < b \leqslant \infty, -\infty < \omega < \infty). \tag{3.16}$$

Пусть $q(t) \geqslant 0$ и $p(t,\omega)$ не убывает по ω (например, $p(t,\omega) = \omega p_1(t) + p_2(t)$, $p_1(t) \geqslant 0$). Через Ω обозначим множество тех значений ω, при которых решения уравнения (3.16) колеблются на $[a,b)$. Если, например, $p(t,\omega) \equiv \omega$, $q(t) \equiv \mathrm{const} > 0$, то Ω, очевидно, представляет собой интервал $(-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q})$. Оказывается, что примерно аналогичная ситуация имеет место и в общем случае.

Обозначим через ω_0 infimum значений ω, для которых $I_1[p(t,\omega)] < \infty$ (если таких значений нет, полагаем $\omega_0 = \infty$, если же $I_1[p(t,\omega)] < \infty$ при всех ω, то, естественно, полагаем $\omega_0 = -\infty$).

Следствие 3.3. *При сделанных предположениях множество Ω связно. Кроме того, если Ω непусто и ω_0 конечно, то $\omega_0 \in \bar{\Omega}$.*

Доказательство. Возможны четыре случая:

$$\omega_0 = -\infty, \tag{3.17}$$

$$\omega_0 = \infty, \tag{3.18}$$

$$\omega_0 \quad \text{конечно,} \ I_1[p(t,\omega_0)] < \infty, \tag{3.19}$$

$$\omega_0 \quad \text{конечно,} \ I_1[p(t,\omega_0)] = \infty. \tag{3.20}$$

Из соображений монотонности ясно, что $I_1[p(t,\omega)] = \infty$ при всех $\omega < \omega_0$ и $I_1[p(t,\omega)] < \infty$ при всех $\omega > \omega_0$. Отсюда, учитывая утверждения а), б) теоремы 3.2, легко получить следующие свойства характеристической функции $\chi(\omega)$ множества Ω:

в случае (3.17) $\chi(\omega)$ не возрастает на $(-\infty, \infty)$;
в случае (3.18) $\chi(\omega)$ не убывает на $(-\infty, \infty)$;
в случае (3.19) $\chi(\omega)$ не убывает на $(-\infty, \omega_0)$ и не возрастает на $[\omega_0, \infty)$;
в случае (3.20) $\chi(\omega)$ не убывает на $(-\infty, \omega_0]$ и не возрастает на (ω_0, ∞).

Покажем, например, что в случае (3.20) функция $\chi(\omega)$ не убывает на $(-\infty, \omega_0]$, т. е. что соотношения $\omega_1 < \omega_2 \leqslant \omega_0$, $\chi(\omega_2) = 0$ влекут за собой (при условии (3.20)) соотношение $\chi(\omega_1) = 0$. Действительно, так как $I_1[p(t,\omega_2)] = \infty$, $p(t,\omega_1) \leqslant p(t,\omega_2)$, то неколебательность решений (3.16) при $\omega = \omega_1$ вытекает (в силу утверждения б) теоремы 3.2) из неколебательности при $\omega = \omega_2$. Аналогично проверяются и остальные утверждения о монотонности $\chi(\omega)$. Следствие 3.3 вытекает из этих утверждений.

Итак, Ω представляет собой промежуток в широком смысле слова (этот промежуток может быть пустым, может представлять собой одну точку или всю числовую прямую, может быть конечным, полубесконечным, открытым, замкнутым, полуоткрытым). В случаях (3.17), (3.18) Ω либо пусто, либо полубесконечно, либо заполняет всю прямую $(-\infty, \infty)$; в случаях же (3.19), (3.20), по-видимому, возможны все перечисленные выше возможности.

Некоторые из возможностей иллюстрируются следующим простым примером. Пусть $p(t,\omega) \equiv \omega$, $q(t) = t^k$, $a > 0$, $b = \infty$. Очевидно, $\omega_0 = 0$. Множество Ω пусто при $k < -2$, состоит из единственной точки $\omega = 0$ при $-2 \leqslant k < 0$, представляет собой интервал $(-2, 2)$ при $k = 0$ и, наконец, заполняет всю числовую прямую при $k > 0$. Все это легко усмотреть с помощью замены $x(t) = y(t)\exp(-\omega t/2)$.

Следствие 3.3 показывает, что неколебательность при ω_1, ω_2 таких, что $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$, влечет за собой неколебательность при всех ω, лежащих вне интервала (ω_1, ω_2). Окрестность точки ω_0 является, таким образом, «местом наибольшей колебательности» (в логическом смысле): *если решения уравнения* (3.16) *не колеблются при всех ω, лежащих в некоторой окрестности ω_0, то они не колеблются при любом ω из* $(-\infty, \infty)$. (При $\omega_0 = \pm\infty$ следует, конечно, говорить не об окрестности, а полуокрестности.) Отметим, что значение ω_0 не зависит от $q(t)$ и нахождение его обычно не представляет труда. В [49] автором был задан вопрос: не является ли само ω_0 (если оно конечно) «точкой наиболее вероятной колебательности», т. е. не вытекает ли из неколебательности решений (3.16) при $\omega = \omega_0$ неколебательность при всех $\omega \in (-\infty, \infty)$? Ответ здесь отрицательный, как показывает пример: $p(t,\omega) = 1 - 3\exp(-\omega t)$, $q(t) \equiv 1$ $(0 \leqslant t < \infty)$; в данном случае $\omega_0 = 0$, $\Omega = (0, \infty)$.

3.3. В заключение мы обсудим методический вопрос о переходе от уравнения $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ к уравнению $\ddot{y} + fy = 0$. Такой переход может быть осуществлен элементарными аналитическими преобразованиями, из которых следующие два хорошо известны (см., например, [72, 73]):

1) *замена функции* $x(t) = y(t)\exp\Big(-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int^{t} p(\tau)\,d\tau\Big)$ *переводит уравнение* $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ *в уравнение* $\ddot{y} + \Big(q - \dfrac{1}{2}\dot{p} - \dfrac{1}{4}p^2\Big)y = 0$;

2) *замена переменной* $s = \displaystyle\int^{t} \exp\Big(-\int^{u} p(\tau)\,d\tau\Big)$ *переводит уравнение* $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ $\Big($*после умножения на* $\exp\Big(2\displaystyle\int^{t} p(\tau)\,d\tau\Big)\Big)$ *в уравнение* $\dfrac{d^2\tilde{x}}{ds^2} + q_1(s)\tilde{x} = 0$, *где* $\tilde{x}(s) = x[t(s)]$, $q_1(s) = q(t)\exp\Big(2\displaystyle\int^{t} p(\tau)\,d\tau\Big)$, $t = t(s)$.

Ввиду возможности исключения члена, содержащего $\dot{x}$, часто высказывается суждение о том, что «полное» уравнение $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ вообще не нуждается в изучении (см., например, [151, с. 158—159]). С этим трудно согласиться, поскольку известен ряд предложений, существенно использующих наличие диссипативного члена $p(t)\dot{x}$ и не имеющих прямых аналогов для случая $p(t) \equiv 0$; попытки доказать эти утверждения с помощью перехода к «укороченному» уравнению $\ddot{y} + fy = 0$ не упрощают, а лишь усложняют задачу. Примерами могут служить теоремы 4—7 работы [53], последняя из которых упоминалась выше. Все же обычно переход к укороченному уравнению целесообразен; при этом возникает вопрос о выборе наиболее удачного преобразования. Недостатком преобразования 1) является требование абсолютной непрерывности функции $p(t)$, не отвечающее существу дела, но необходимое если оставаться в классических рамках и избегать «дебрей», связанных с обобщенными коэффициентами. От этого недостатка свободно преобразование 2), которое, тем не менее, применяется значительно реже, чем преобразование 1) (так, в [8, 151] упоминается лишь 1)). Это объясняется следующим. Во-первых, если $I_1(p) < \infty$, то при 2) полуось $t \geqslant t_0$ отображается не на полуось, а на конечный полуинтервал; во-вторых, в весьма важном случае ω-периодических коэффициентов p, q преобразование 2), в отличие от 1), не обеспечивает периодичности нового коэффициента q_1.

В связи со сказанным, для периодического случая предлагается следующее комбинированное преобразование. Пусть $p(t)$, $q(t)$ — ω–периодические суммируемые функции, причем $p(t)$ вещественна. Положим $\dfrac{1}{2\omega}\displaystyle\int\limits_0^\omega p(t)\,dt = k$.

3) *Замена функции* $y(t) = e^{kt}x(t)$ *и замена переменной* $s = s(t) = \displaystyle\int\limits_0^t \exp\left(2ku - \int\limits_0^u p(\tau)\,d\tau\right)du$ *переводят уравнение* $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ *в уравнение* $\dfrac{d^2\tilde{y}}{ds^2} + q_1(s)\tilde{y} = 0$*, где* $\tilde{y}(s) = y[t(s)]$*,*
$q_1(s) = [q(t) - kp(t) + k^2]\exp\left(2\displaystyle\int\limits_0^t p(\tau)\,d\tau - 4kt\right)$*,* $t = t(s)$.

Очевидно, $q_1(s)$ ω_1–периодична, причем

$$\omega_1 = \int\limits_0^\omega \exp\left(2kt - \int\limits_0^t p(\tau)\,d\tau\right)dt.$$

Преобразование 3) (ранее, по-видимому, не отмечавшееся) свободно от недостатков преобразований 1) и 2): оно переводит полуось в полуось, сохраняет периодичность коэффициентов и не требует никакой гладкости функции $p(t)$. Поэтому при общих рассмотрениях, связанных с вещественным периодическим случаем, оно является более предпочтительным. В связи с этим можно упомянуть, например, работу В. А. Якубовича [75], где устанавливаются тонкие оценки характеристических показателей для уравнения $\ddot{x} + fx = 0$, $f(t+\omega) \equiv f(t)$; с помощью преобразования 1) эти результаты распространяются затем на уравнение $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$, $p(t+\omega) \equiv p(t)$, $q(t+\omega) \equiv q(t)$ в предположении абсолютной непрерывности $p(t)$. Применение здесь преобразования 3) вместо преобразования 1) позволяет избавиться от этого ограничения.

Литература

1. *Hille, E.* Non-oscillation theorems / E. Hille // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1948. — Vol. 64, no. 2. — P. 234—258.
2. *Halanay, A.* Comportarea asimptotică a soluţiilor ecuaţiilor de ordinul al doilea de tip neoscilator / A. Halanay // *Comunicările Acad. Rep. pop. Romîne.* — 1959. — Vol. 9, no. 11. — P. 1121—1128.
3. *Гихман, И. И.* По поводу одной теоремы Н.Н. Боголюбова / И. И. Гихман // *Укр. матем. журн.* — 1952. — Т. 4, № 2. — С. 215—219.
4. *Красносельский, М. А.* О принципе усреднения в нелинейной механике / М. А. Красносельский, С. Г. Крейн // *УМН.* — 1955. — Т. 10, № 3. — С. 147—153.
5. *Курцвейль, Я.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра / Я. Курцвейль, З. Ворел // *Чехосл. матем. журн.* — 1957. — Т. 7, № 4. — С. 568—583.
6. *Antosiewicz, H.* Continuous parameter dependence and the method of averaging $\frac{d^2y}{dx^2}+py=0$ / H. Antosiewicz. — 1963. — Vol. 1. — P. 51—58.
7. *Reid, W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems / W. T. Reid // *J. Differ. Equations.* — 1967. — Vol. 3, no. 3. — P. 423—439.
8. *Чезари, Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. — М.: Мир, 1964. — 477 с.
9. *Wintner, A.* On a theorem of Bôcher in the theory of ordinary linear differential equations / A. Wintner // *Amer. J. Math.* — 1954. — Vol. 76. — P. 183—190.
10. *Kurzweil, J.* Generalized Ordinary Differential Equations and Continuous Dependence on a Parameter / J. Kurzweil // *Czech. Math. J.* — 1957. — Vol. 7 (82), no. 3. — P. 418—449.
11. *Песин, И. Н.* Развитие понятия интеграла / И. Н. Песин. — М.: Наука, 1966. — 207 с.
12. *Аткинсон, Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М.: Мир, 1968. — 748 с.
13. *Потапов, В. П.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций / В. П. Потапов // *Труды Моск. матем. о-ва.* — 1955. — Т. 4. — С. 125—236.
14. *Ляпунов, А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — Харьков: Изд. Харьковского матем. о-ва, 1892.
15. *Крейн, М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости / М. Г. Крейн // *ПММ.* — 1951. — Т. 15, вып. 3. — С. 323—348.
16. *Якубович, В. А.* Об ограниченности решений уравнения $y''+p(t)y=0$, $p(t+\omega)==p(t)$ / В. А. Якубович // *ДАН СССР.* — 1950. — Т. 74, № 5. — С. 901—903.
17. *Opial, Z.* Sur un probléme de stabilité / Z. Opial // *Ann. Polon. Math.* — 1958. — Vol. 5, no. 2. — P. 153—164.
18. *Старжинский, В.* Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / В. Старжинский // *ПММ.* — 1954. — Т. 18. — С. 469—506.
19. *Жуковский, Н. Е.* Условия конечности интегралов уравнения $\frac{d^2y}{dx^2}+py=0$ / Н. Е. Жуковский // *Матем. сб.* — 1892. — Т. 16, вып. 3. — С. 582—591.
20. *Adamoff, N.* Sur l'oscillation des integrates de l'équation du deuxiéme ordre aux

coefficients périodiques et sur quelques conditions de la stabilité / N. Adamoff // *Матем. сб.* — 1935. — Vol. 42, no. 6. — P. 651—668.

21. *Левин, А. Ю.* Уравнение Фредгольма с гладким ядром и краевые задачи для линейного дифференциального уравнения / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1964. — Т. 159, № 1. — С. 13—16.
22. *Наймарк, М. А.* Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — 2-е изд. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
23. *Келдыш, М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М. В. Келдыш // *ДАН СССР.* — 1951. — Т. 77, № 1. — С. 11—14.
24. *Гельфонд, А. О.* О росте собственных значений однородных интегральных уравнений / А. О. Гельфонд // Ловитт, У. В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М.: Гостехиздат, 1957. — С. 233—263.
25. *Hille, E.* On the characteristic values of linear integral equations / E. Hille, J. D. Tamarkin // *Acta Math.* — 1931. — Vol. 57. — P. 1—76.
26. *Харди, Г.* Неравенства / Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа. — М.: ИЛ, 1948. — С. 456.
27. *Левин, А. Ю.* О многоточечной краевой задаче: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. Ю. Левин. — Воронеж, 1962. — 112 с.
28. Интегральные уравнения / П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский и др. — М.: Наука, 1968.
29. *Гантмахер, Ф. Р.* О несимметрических ядрах Келлога / Ф. Р. Гантмахер // *ДАН СССР.* — 1936. — Т. 1, № 1. — С. 3—5.
30. *Крейн, М. Г.* О несимметрических осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов / М. Г. Крейн // *ДАН СССР.* — 1939. — Т. 25, № 8. — С. 643—646.
31. *Крейн, М. Г.* Осцилляционные теоремы для обыкновенных линейных дифференциальных операторов произвольного порядка / М. Г. Крейн // *ДАН СССР.* — 1939. — Т. 25, № 9. — С. 717—720.
32. *Комленко, Ю. В.* О некоторых оценках промежутка применимости теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах и критериях устойчивости дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / Ю. В. Комленко // *Изв. вузов. Математика.* — 1966. — № 1. — С. 99—103.
33. *Mikusinski, I.* Sur léquation $x^{(n)} + A(t)x = 0$ / I. Mikusinski // *Ann. Polon. Math.* — 1955. — Vol. 1, no. 2. — P. 207—221.
34. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / В. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
35. *Кондратьев, В. А.* О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ / В. А. Кондратьев // *Труды Моск. матем. о-ва.* — 1961. — № 10. — С. 419—436.
36. *Левин, А. Ю.* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)}+p_1(t)x^{(n-1)}+\dots+p_n(t)x = 0$ / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1969. — Т. 24, № 2(146). — С. 43—96.
37. *Полиа, Г.* Задачи и теоремы из анализа / Г. Полиа, Г. Сеге. — М.; Л.: Гостехиздат, 1938. — Т. 2. — 431 с.
38. *Polia, G.* On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation / G. Polia // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1924. — Vol. 24. — P. 312—324.
39. *Mammana, G.* Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in

prodotto di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenzi ali lineari / G. Mammana // *Math. Z.* — 1931. — Vol. 33. — P. 186—231.
40. *de la Vallée Poussin, C.* Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n / C. de la Vallée Poussin // *J. Math. Pures et Appl. (9)*. — 1929. — Vol. 8. — P. 125—144.
41. *Азбелев, Н. В.* К вопросу об оценке числа нулей решений уравнения $y'''+p(x)y'+ q(x)y = 0$ / Н. В. Азбелев // *НДВШ, физ.-матем. науки*. — 1958. — № 3. — С. 5—7.
42. *Азбелев, Н. В.* К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка / Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк // *Матем. сб.* — 1960. — Т. 51(93), № 4. — С. 475—486.
43. *Бернштейн, С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть первая / С. Н. Бернштейн. — М.; Л.: ОНТИ, 1937. — 203 с.
44. *Бернштейн, С. Н.* О базе системы Чебышёва / С. Н. Бернштейн // *Изв. АН. Сер. матем.* — 1938. — Т. 2:2, № 5-6. — С. 499—504.
45. *Бессмертных, Г. А.* О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной / Г. А. Бессмертных, А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1962. — Т. 144, № 3. — С. 471—474.
46. *Кондратьев, В. А.* О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка / В. А. Кондратьев // *Труды Моск. матем. о-ва*. — 1959. — № 8. — С. 259—281.
47. *Алексеев, В. М.* К методу «замораживания» / В. М. Алексеев, Р. Э. Виноград // *Вестник МГУ. Сер. матем., механ.* — 1966. — № 5. — С. 30–35.
48. *Hartman, P.* Disconjugate n-th order differential equations and principal solutions / P. Hartman // *Bull. Am. Math. Soc.* — 1968. — Vol. 74. — P. 125—129.
49. *Левин, А. Ю.* Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ в неколебательном случае / А. Ю. Левин // *Матем. сб.* — 1968. — Т. 75 (117), № 1. — С. 39—63.
50. *Wintner, A.* Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator in its hyperbolic range / A. Wintner // *Duke Math. J.* — 1948. — Vol. 15, no. 1. — P. 55—67.
51. *Соболь, И. М.* Граничное решение уравнения Риккати и его применение к исследованию решений линейного дифференциального уравнения второго порядка / И. М. Соболь // *Ученые записки Моск. гос. ун-та. (Математика. Том V.)* — 1952. — Вып. 155. — С. 195—205.
52. *Opial, Z.* Sur l'allure asymptotique des solutions de l'équation differentielle $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$ / Z. Opial // *Ann. polon. math.* — 1959. — Vol. 6, no. 2. — P. 181—200.
53. *Левин, А. Ю.* Об устойчивости решений уравнений второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1961. — Т. 141, № 6. — С. 1298—1301.
54. *Левин, А. Ю.* Об одном принципе сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1960. — Т. 135, № 4. — С. 783—786.
55. *Левин, А. Ю.* К вопросу о нулевой зоне устойчивости / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1962. — Т. 145, № 6. — С. 1221—1223.
56. *Левин, А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 774—777.

57. *Демидович, Б. П.* О некоторых теоремах осреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений / Б. П. Демидович // *Матем. сб.* — 1954. — Т. 35(77), № 1. — С. 73—92.
58. *Kurzweil, J.* Addition to my paper “Generalized ordinary differential equations and continuos dependence on a parameters” / J. Kurzweil // *Czech. Math. J.* — 1959. — Vol. 9(83), no. 4. — P. 564—573.
59. *Гамкрелидзе, Р. В.* Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах / Р. В. Гамкрелидзе, Г. Л. Харатишвили // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1969. — Т. 33, № 4. — С. 781—839.
60. *Боголюбов, Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М.: Физматгиз, 1955. — 447 с.
61. *Левин, А. Ю.* «Сходящиеся» системы линейных уравнений / А. Ю. Левин // Тезисы докладов Московского математического конгресса. — 1966. — Секция 6. — С. 32—33.
62. *Kurzweil, J.* Unicity of solutions of generalized differential equations / J. Kurzweil // *Czech. Math. J.* — 1958. — Vol. 8, no. 4. — P. 502—509.
63. *Крейн, М. Г.* Об одном обобщении исследований Стилтьеса / М. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 881—884.
64. *Кац, И. С.* О поведении спектральных функций дифференциальных систем второго порядка / И. С. Кац // *ДАН СССР*. — 1956. — Т. 106, № 2. — С. 183—186.
65. *Feller, W.* Generalized second order differential operators and their lateral conditions / W. Feller // *Illinois J. Math.* — 1957. — Vol. 1, no. 4. — P. 459—504.
66. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
67. *Гохман, Э. Х.* Интеграл Стильтьеса и его приложения / Э. Х. Гохман. — М.: Физматгиз, 1958. — 191 с.
68. *Мышкис, А. Д.* Системы с толчками в заданные моменты времени / А. Д. Мышкис, А. М. Самойленко // *Матем. сб.* — 1967. — Т. 74(116), № 2. — С. 202–208.
69. *Epheser, H.* Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung / H. Epheser // *Math. Z.* — 1955. — Vol. 61. — P. 435—454.
70. *Левин, А. Ю.* О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1963. — Т. 153, № 6. — С. 1257—1260.
71. *Borg, G.* Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen / G. Borg // *Ark. Mat. Astron. Fys. A*. — 1944. — Vol. 31, no. 1. — P. 460—482.
72. *Беллман, Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман. — М.: ИЛ, 1954. — 215 с.
73. *Коддингтон, Э. А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. — М.: ИЛ, 1958. — 475 с.
74. *Нейгауз, М. Г.* Об ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / М. Г. Нейгауз, В. Б. Лидский // *ДАН СССР*. — 1951. — Т. LXXVII, № 2. — С. 189—192.
75. *Якубович, В. А.* Оценка характеристических показателей и критерии устойчивости для линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами / В. А. Якубович // *ДАН СССР*. — 1952. — Т. 87, № 3. — С. 345—348.
76. *Левин, А. Ю.* Об одном критерии устойчивости / А. Ю. Левин // *УМН*. —

1962. — Т. 17, № 3(105). — С. 211—212.
77. *Карасева, Т. М.* О скорости роста и об ограниченности решений дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами / Т. М. Карасева // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1965. — Т. 29, № 1. — С. 41—70.
78. *Гохберг, И.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Гохберг, М. Крейн. — М.: Наука, 1965. — Р. 448.
79. *Колмогоров, А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале / А. Н. Колмогоров // *Ученые записки МГУ.* — 1939. — Т. 30. — С. 3—16.
80. *Gorny, A.* Contribution a l'etude des fonctions dérivable d'une variable réelle / A. Gorny // *Acta Math.* — 1939. — Vol. 71. — P. 317—358.
81. *Марков, В. А.* О функциях, наименее уклоняющихся от нуля / В. А. Марков. — СПб.: Изд-во Спб ун-та, 1892.
82. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. — М.: Гостехиздат, 1949. — Т. 3.
83. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. — М.: Наука, 1965. — Т. 1.
84. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
85. *Левин, Б. Я.* Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с.
86. *Маркушевич, А. И.* Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. — М.: Наука, 1968. — Т. 2.
87. *Данфорд, Н.* Линейные операторы / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. — М.: ИЛ, 1962. — Т. 1.
88. Некоторые краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений / А. В. Кибенко, М. А. Красносельский, А. Ю. Левин, А. И. Перов // Труды IV Всесоюз. матем. съезда. — Л., 1964. — Т. 2. — С. 437—444.
89. *Коллатц, Л.* Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. — М.: Наука, 1968.
90. *Tamarkin, J. D.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary function in a series of fundamental functions / J. D. Tamarkin // *Math. Zeit.* — 1927. — Vol. 57. — P. 1—54.
91. *Смогоржевский, А. С.* Функції Гріна лінійних диференціальных систем в одновимірній області / А. С. Смогоржевский // *Научные записки Укр. научно-иссл. ин-та педагогики.* — 1940. — № 2. — С. 109—115.
92. *Березин, И. С.* Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. — М.: Физматгиз, 1959. — Т. 1.
93. *Гантмахер, Ф. Р.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 360 с.
94. *Левин, А. Ю.* О многоточечной краевой задаче / А. Ю. Левин // *Научные доклады высшей школы.* — 1958. — № 5. — С. 34—37.
95. *Nehari, Z.* On an inequality of Lyapunov / Z. Nehari // Stud. math. anal. and rel. top. — Stanford, California: Univ. Press, 1962. — P. 256—261.
96. *Зайцева, Г. С.* О многоточечной краевой задаче / Г. С. Зайцева // *ДАН СССР.* — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 763—765.
97. *Левин, А. Ю.* О распределении нулей решений линейного дифференциального

уравнения / А. Ю. Левин // *ДАН СССР*. — 1964. — Т. 156, № 6. — С. 1281—1284.
98. *Hartman, P.* Mean value theorems and linear operators / P. Hartman, A. Wintner // *Amer. Math. Monthly*. — 1955. — Vol. 62. — P. 217—222.
99. *Беккенбах, Э.* Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман. — М.: Мир, 1965. — 276 с.
100. *Крейн, М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций / М. Г. Крейн // *ДАН СССР*. — 1938. — Т. 18, № 4–5. — С. 245—249.
101. *Чичкин, Е. С.* Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач / Е. С. Чичкин // *Изв. вузов. Математика*. — 1962. — Т. 2. — С. 170—179.
102. *Азбелев, Н. В.* Теоремы о дифференциальном неравенстве для краевых задач / Н. В. Азбелев, А. Я. Хохряков, З. Б. Цалюк // *Матем. сб.* — 1962. — Т. 59(101) (доп.). — С. 125–144.
103. *Хохряков, А. Я.* К вопросу о периодической краевой задаче для дифференциального уравнения третьего порядка / А. Я. Хохряков // *Матем. сб.* — 1964. — Т. 63, № 4. — С. 639—645.
104. *Пак, С. А.* К вопросу о дифференциальных неравенствах для краевых задач: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С. А. Пак. — Воронеж, 1964.
105. *Юберев, Н. Н.* О линейной периодической краевой задаче для уравнений в конечных разностях / Н. Н. Юберев // *Дифф. уравнения*. — 1966. — Т. 2, № 6. — С. 784—790.
106. *Колесов, Ю. С.* О знаке функции Грина некоторых периодических краевых задач / Ю. С. Колесов, А. Ю. Левин // Проблемы матем. анализа сложных систем. — Воронеж, 1967. — Вып. 1. — С. 40—43.
107. *Bellman, R.* A note on the identification of linear systems / R. Bellman // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1966. — Vol. 17, no. 1. — P. 68—71.
108. *Чуриков, В. А.* Об условиях существования функции Грина краевой задачи / В. А. Чуриков // *Дифф. уравнения*. — 1966. — Т. 2, № 9. — С. 1184—1192.
109. *Глазман, И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов / И. М. Глазман. — М.: Физматгиз, 1963. — 339 с.
110. *Крейн, М. Г.* Sur les opérateurs différentiels autoadjoints et leurs fonctions de Green symétriques / М. Г. Крейн // *Матем. сб.* — 1937 . — Vol. 2(44), no. 6. — P. 1023—1072.
111. *Ахундов, А. М.* О решениях дифференциального уравнения / А. М. Ахундов, А. Тораев // *Изв. АН Туркм. ССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук*. — 1964. — № 1. — С. 21—23.
112. *Moldovan, E.* Asupra notiunii de functie convexä fatä de o multime interpolatoare / E. Moldovan // *Studii si cercet. de matem. (Cluj)*. — 1958. — Vol. 9. — P. 161—224.
113. *Aramă, O.* Sur un théorème de W. A. Markov / O. Aramä // *Math. (RPR)*. — 1961. — Vol. 3, no. 2. — P. 197—216.
114. *Markov, W. A.* Über Polinome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen / W. A. Markov // *Math. Ann.* — 1916. — Vol. 77. — P. 213—258.
115. *Калафати, П. Д.* О функциях Грина обыкновенных дифференциальных уравнений / П. Д. Калафати // *ДАН СССР*. — 1940. — Т. 26, № 6. — С. 535—539.
116. *Bobrowski, D.* O odleglośki między zerami pewnych rozwišzań równania rózniczkowego liniowego czwartego rzędu / D. Bobrowski // *Zesz. nauk. Po-*

litechn. poznańsk. — 1965. — Vol. 29. — P. 55—60.

117. *Тонков, Е. Л.* Периодические решения и устойчивость линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами / Е. Л. Тонков, Г. И. Юткин // *Дифф. уравнения.* — 1969. — Т. 5, № 11. — С. 1990 – 2001.
118. *Сансоне, Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Д. Сансоне. — М.: ИЛ, 1953. — Т. 1. — 346 с.
119. *Остроумов, В. В.* Об однозначной разрешимости задачи Валле-Пуссена / В. В. Остроумов // *Дифф. уравнения.* — 1968. — Т. 4, № 2. — С. 261–268.
120. *Болтянский, В. Г.* Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. — М.: Наука, 1969. — 408 с.
121. *Комленко, Ю. В.* Условия разрешимости некоторых краевых задач для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка / Ю. В. Комленко // *ДАН СССР.* — 1967. — Т. 174, № 5. — С. 1018—1020.
122. *Lasota, A.* L'application du principe de Pontriagin a revaluation de l'intervalle d'existence et d'unicite des solutions d'un probleme aux limites / A. Lasota, Z. Opial // *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astr. et Phys.* — 1963. — Vol. 11, no. 2. — P. 41—46.
123. *Мираков, В. Е.* Об условиях разрешимости задачи Чаплыгина / В. Е. Мираков // *ДАН СССР.* — 1966. — Т. 170, № 4. — С. 776—779.
124. *Чаплыгин, С. А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений / С. А. Чаплыгин. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 102 с.
125. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко. — М.: Физматгиз, 1963. — 248 с.
126. *Азбелев, Н. В.* Об интегральных и дифференциальных неравенствах / Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк // Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, 2. — 1964. — С. 384–391.
127. *Schröder, J.* Ungleichunden und Fehlerabschätzungen / J. Schröder // *Труды Международного конгресса математиков.* — М.: Мир, 1968. — С. 101—129.
128. *Левин, А. Ю.* Некоторые вопросы осцилляции решений линейных дифференциальных уравнений / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1963. — Т. 148, № 3. — С. 512—515.
129. *Левин, А. Ю.* Оценка для функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных / А. Ю. Левин // *Матем. сб.* — 1964. — Т. 64(106), № 3. — С. 396—409.
130. *Тептин, А. Л.* Теоремы о разностных неравенствах для n-точечных разностных краевых задач / А. Л. Тептин // *Матем. сб.* — 1963. — Т. 62, № 3. — С. 345—370.
131. *Полиа, Г.* Задачи и теоремы из анализа / Г. Полиа, Г. Сёге. — М.: Гостехиздат, 1956. — Т. 2. — 432 с.
132. *Feckete, M.* Über ein Problem von Laguerre / M. Feckete // *Rend. Circ. Matem. di Palermo.* — 1912. — Vol. 34. — P. 89—100.
133. *Hartman, P.* Unrestricted n-parameter families / P. Hartman // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* — 1958. — Vol. 7(2). — P. 123—142.
134. *Aramă, O.* Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuatii diferentiale liniare / O. Aramă // *Studii si cercet. de matem. (Cluj).* — 1959. — Vol. 10. — P. 207—257.
135. *Покорный, Ю. В.* О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи / Ю. В. Покорный // *Матем. заметки.* — 1968. — Т. 4, № 5. — С. 533—540.

136. *Тептин, А. Л.* Об оценке промежутка неосцилляции разностного уравнения и разностных краевых задач / А. Л. Тептин // *Дифф. уравнения.* — 1966. — Т. 2, № 11. — С. 1449—1468.
137. *Esclangon, E.* Nouvelles Recherches sur les Fonctions Quasiperiodiques / E. Esclangon // *Anne Observatoire de Bordeaux.* — 1917. — Vol. 16. — P. 51—226.
138. *Соболь, И. М.* Об уравнениях Риккати и приводимых к ним линейных уравнениях второго порядка / И. М. Соболь // *ДАН СССР.* — 1949. — Т. 65, № 3. — С. 275—278.
139. *Кондратьев, В. А.* Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнения $y'' + p(x)y = 0$ / В. А. Кондратьев // *ДАН СССР.* — 1957. — Т. 113, № 4. — С. 742—745.
140. *Ráb, M.* Kriterien für die Oszillation der Losungen der Differentialgleichung $[p(x)y']' + q(x)y = 0$ / M. Ráb // *Časop. pro pěst, matem.* — 1959. — Vol. 84. — P. 335—370.
141. *Ельшин, М. И.* Об одном решении классической проблемы колебаний / М. И. Ельшин // *ДАН СССР.* — 1962. — Т. 147, № 5. — С. 1013—1016.
142. *Willett, D.* Classification of second order linear differential equations with respect to oscillation / D. Willett // *Advances in Math.* — 1969. — Vol. 3, no. 4. — P. 594 – 623.
143. *Левин, А. Ю.* Классификация неколебательных случаев для уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ со знакопостоянной $q(t)$ / А. Ю. Левин // *ДАН СССР.* — 1966. — Т. 171, № 5. — С. 1037—1040.
144. *Mařik, I.* Nichtoszillatorische lineare Differentialgleichungen 2 Ordnung / I. Mařik, M. Ráb // *Чехосл. матем. журн.* — 1963. — Vol. 13. — P. 209—225.
145. *Gheorghiu, N.* Sur le comportement asymptotique des solutions des équations différentielles ordinaires linéaires du second ordre / N. Gheorghiu // *Anal. Univ. Cuza, Iaşi.* — 1961. — Vol. 7, no. 1. — P. 77—84.
146. *Haupt, O.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser lincarer gewöhnlicher Differentialgleichungen / O. Haupt // *Math. Z.* — 1942. — Vol. 48. — P. 289—292.
147. *Richard, U.* Serie asintotiche per una classe di equazioni differenziali lineari non oscillanti del 2° ordine / U. Richard // *Rend. Sem. mat. Univ. e Politecn. Torino.* — 1963/1964. — Vol. 23. — P. 171—217.
148. *Ráb, M.* Les développements asymptotiques des solutions de l'équation $(py')' + qy = 0$ / M. Ráb // *Arch. math. (Brno).* — 1966. — Vol. 2. — P. 1—17.
149. *Гермейер, Ю. Б.* О приближенных представлениях решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка / Ю. Б. Гермейер, Д. С. Иргер // *ДАН СССР.* — 1953. — Т. 93, № 6. — С. 961—964.
150. *Левин, А. Ю.* Интегральный критерий неосцилляционности для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ / А. Ю. Левин // *УМН.* — 1965. — Т. 20, № 2 (122). — С. 244—246.
151. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М.: Физматгиз, 1961. — 589 с.

Оглавление

Научное издание

Левин Анатолий Юрьевич

Вопросы качественной теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения

Монография

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерная верстка С. Д. Глызин

Подписано в печать 15.02.11. Формат $60 \times 84/8$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,6. Уч. изд. л. 15,0.
Гарнитура Антиква. Бумага офсетная.
Тираж 100 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано на ризографе.

ООО «КопиЦентр»
150000, Ярославль, ул. Первомайская, 37а, оф. 1
тел. (4852) 73-10-88.